Développement 1 : Théorème de Banach-Steinhaus + Application

Théorème de Banach-Steinhaus : Soit $(X, \| \ \|_X)$ un Banach, $(Y, \| \ \|_Y)$ un espace vectoriel normé et $M \subset \mathcal{L}(X,Y)$ une famille telle que $\forall x \in E$ $\sup_{T \in M} \|Tx\|_Y < \infty$. Alors $\sup_{T \in M} |||T||| < \infty$

→ Soit $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n = \{x \in E \ / \ \forall T \in M \ \|Tx\| \leq n\}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ F_n est fermé : soit $x \in E$ et $(x_k)_k \in F_n^{\mathbb{N}}$ telle que $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$

Alors $\|Tx_k\| \leq n$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall T \in M$ et comme T est continue, $\|Tx\| \leq n$ $\forall T \in M$ donc $x \in F_n$

Par hypothèse, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ donc il existe, d'après le théorème de Baire, car $(E, \| \|)$ est complet, un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} ne soit pas d'intérieur vide.

Soit $x \in \mathring{F}_{n_0}$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset F_{n_0}$

On a donc $\forall z \in B(0,1)$ $\forall T \in M$ $\|T(\underbrace{x + rz}_{\in B(x,r)})\| \leq n_0$

En particulier $\forall \tilde{x} \in E \setminus \{0\}$ $\forall T \in M$ on a

$$\|T\tilde{x}\| = \frac{\|\tilde{x}\|}{r} \left\|T\left(x + r\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right) - Tx\right\| \leq \frac{\|\tilde{x}\|}{r}\left(\left\|T\left(x + r\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\right)\right\| + \|Tx\|\right)$$

$$\leq \frac{\|\tilde{x}\|}{r}\left(n_0 + \sup_{T \in M} \|Tx\|\right)$$

donc $\forall T \in M$ $|||T||| \leq \dfrac{n_0 + \sup_{T \in M} \|Tx\|}{r} < \infty$ $\square$

Application : Il existe $f \in C^0(\mathbb{T})$ telle que la série de Fourier de f en 0 diverge.

→ On pose $T_n : C^0(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto S_n(f,0)$ où $C^0(\mathbb{T})$ est muni de $\| \ \|_\infty$ et $\mathbb{C}$ de $| \ |$.

où $S_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(-t)\,dt$ avec $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ $\forall t \in \mathbb{T}$

Alors, T_n est linéaire et $\forall f \in C^0(\mathbb{T})$ $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(-t)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty |D_n(-t)|\,dt$

$$= \frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(-t)|\,dt = \|f\|_\infty \|D_n\|_1$$

donc $T_n \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{T}), \mathbb{C})$ et $|||T_n||| \leq \|D_n\|_1$

Montrons qu'on a en fait égalité, c'est à dire qu'il existe $(f_k)_k \in C^0(\mathbb{T})^{\mathbb{N}^*}$ telle que $|T_n f_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} \|D_n\|_1$ et $\|f_k\|_\infty \leq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

On pose $f_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{D_n(t)}{|D_n(t)| + 1/k}$ $\forall k \geq 1$

Alors $\|f_k\|_\infty \leq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

De plus (f_k) est intégrable $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $f_k(t) \xrightarrow[k \to \infty]{} \dfrac{D_n(t)}{|D_n(t)|}$ pour tout t tel que $D_n(t) \neq 0$

donc par convergence dominée, on obtient

$$T_n(f_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt = \|D_n\|_1 \quad \text{et} \quad |||T_n||| \geq \|D_n\|_1$$

donc $|||T_n||| = \|D_n\|_1$

Or, $\|D_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

En effet $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$

donc $e^{\frac{it}{2}} D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt + \frac{it}{2}}$ $\qquad e^{-\frac{it}{2}} D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt - \frac{it}{2}}$

donc $$\left(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}\right) D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt+\frac{it}{2}} - e^{ikt-\frac{it}{2}} = e^{(n+\frac{1}{2})t} - e^{-(n+\frac{1}{2}t)}$$

donc $$D_n(t) = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})t} - e^{-(n+\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \quad \forall t \neq 0$$

$D_n(0) = 2n+1$

Comme $|\sin x| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}\,dt$$

$$\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,du \geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u|\,du$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, comme $|||T_n||| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
On a nécessairement l'existence d'un $f \in C^0(\mathbb{T})$ tel que $|T_n f| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
En effet, $(C^0(\mathbb{T}), \|\ \|_\infty)$ est un Banach.

Leçons concernées : 205 Espaces complets. Exemples et applications
208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples
246 Série de Fourier. Exemples et applications