LEÇON 205 = ESPACES COMPLETS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

DEVELOPPEMENT = THEOREME DE BAIRE / THEOREME DE BANACH-STEINHAUS

Théorème de Baire = Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet.

. Soit $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses de E. Alors l'ensemble $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E.

. Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Alors l'ensemble $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Démonstration =. Soit $a \in E$ et $r>0$. Montrons qu'il existe $x\in\Omega$ tel que $\|a-x\|<r$.
L'ouvert Ω_0 est dense dans E et $B(a,r)$ est ouverte donc $B(a,r)\cap\Omega_0 \neq \emptyset$.
Comme $B(a,r)\cap\Omega_0$ est ouvert il existe $x_0\in E$ et $0<r_0\leq 1$ tels que $\overline{B}(x_0,r_0)\subset B(a,r)\cap\Omega_0$. L'ouvert Ω_1 est dense dans E et $B(x_0,r_0)$ est ouverte donc $B(x_0,r_0)\cap\Omega_1\neq\emptyset$. Comme $B(x_0,r_0)\cap\Omega_1$ est ouvert, il existe $x_1\in E$ et $0<r_1\leq\frac{1}{2}$ tels que $\overline{B}(x_1,r_1)\subset B(x_0,r_0)\cap\Omega_1$.
On poursuit la construction des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(r_n)_{n\geq 0}$ par récurrence = soit $n\in\mathbb{N}^*$, si $x_0,\dots,x_{n-1}$ sont définis, ainsi que $r_0,\dots,r_{n-1}$ on a, puisque Ω_n est dense dans E, $B(x_{n-1},r_{n-1})\cap\Omega_n\neq\emptyset$. Il existe donc, puisque $B(x_{n-1},r_{n-1})\cap\Omega_n$ est ouvert, $x_n\in E$ et $0<r_n\leq\frac{1}{2^n}$ tels que $\overline{B}(x_n,r_n)\subset B(x_{n-1},r_{n-1})\cap\Omega_n$.
On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\overline{B}(x_n,r_n)\subset\overline{B}(x_{n-1},r_{n-1})\subset\dots\subset\overline{B}(x_0,r_0)$.
Soit $N\in\mathbb{N}$, si $n,m\geq N$ $x_n\in\overline{B}(x_N,r_N)$ et $x_m\in\overline{B}(x_N,r_N)$ donc

$$\|x_n-x_m\|\leq\|x_n-x_N\|+\|x_N-x_m\|\leq\frac{2}{2^N}=\frac{1}{2^{N-1}}.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc de Cauchy. Comme $(E,\|\cdot\|)$ est complet, elle converge vers un élément $x\in E$.
Soit $n\geq N$, on a $x_n\in\overline{B}(x_N,r_N)$. Comme $\overline{B}(x_N,r_N)$ est fermée, la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est dans $\overline{B}(x_N,r_N)$. En particulier $x\in\Omega_N$.
Comme $\overline{B}(x_N,r_N)\subset\dots\subset\overline{B}(x_0,r_0)\subset B(a,r)$, on a aussi $x\in B(a,r)$.
On a donc trouvé $x\in\Omega$ tel que $\|a-x\|<r$, donc Ω est dense dans E.

. Soit maintenant $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés d'intérieur vide.
On note $\Omega_n = E\setminus F_n$, si $n\in\mathbb{N}$. Alors la suite $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'ouverts de E.
Si $n\in\mathbb{N}$ on a $\overline{\Omega_n}=\overline{E\setminus F_n}=E\setminus\mathring{F}_n=E\setminus\emptyset=E$, donc Ω_n est dense dans E.
D'après ce qui précède on a $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n}=E$, or $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n}=\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E\setminus F_n}=\overline{E\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n}=E\setminus\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n}}$
Par conséquent on a $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n}}=\emptyset$.

Théorème de Banach-Steinhaus : Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach non vide, soit $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si pour tout $x \in E$ on a $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$ alors il existe $c \geq 0$ tel que $\forall x \in E, \forall i \in I \quad \|T_i(x)\|_F \leq c\|x\|_E$.

Démonstration : Soit $n \geq 1$, on pose $F_n = \{x \in E \,/\, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F \leq n\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est fermé et par hypothèse on a $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

On a $\mathring{E} = E$ et E non vide, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathring{F_n} \neq \emptyset$.

Puisque $(E, \|.\|_E)$ est supposé complet, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$ d'après le théorème de Baire.

Il existe donc $a \in E$ et $r > 0$ tels que $\bar{B}(a,r) \subset F_{n_0}$.

Soit $y \in E$ tel que $\|y\|_E \leq 1$.

On a $a + ry \in \bar{B}(a,r)$ donc $\forall i \in I \quad \|T_i(a+ry)\|_F \leq n_0$.

Donc pour tout $i \in I \qquad r\|T_i(y)\|_F \leq n_0 + \|T_i(a)\|$

pour tout $i \in I \qquad \|T_i(y)\|_F \leq \frac{1}{r}(n_0 + \|T_i(a)\|)$.

ainsi, pour tout $i \in I \qquad |||T_i||| \leq \frac{1}{r}(n_0 + \|T_i(a)\|)$

où $|||T_i||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|T_i(x)\|_F$.

Leçons concernées : 202 Exemples de parties denses et applications
205 Espaces complets. Exemples et applications

Références : Haïm Brezis. Analyse Fonctionnelle. Springer