2 Théorèmes de Bernstein

20 mai 2013

Théorème. *Soit $a > 0$ et $f \in C^{\infty}([-a;a],\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [-a;a]$, $f^{(2n)}(t) \geq 0$. Alors f est développable en série entière sur $]-a;a[$.*

Démonstration. On procède en distinguant 2 cas : un cas où f est supposée paire et le cas général.

Cas 1 : On suppose f paire. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n+1)}$ est impaire.

En effet, si on pose $N : t \mapsto -t$ Comme f est paire, on a $f \circ N = f$. Alors $-f' \circ N = N'.f' \circ N = f'$. Ainsi f' est impaire. $N'.f'' \circ N = -f''$ donc f'' est paire. Ainsi $\forall n$, $f^{(2n)}$ est paire, $f^{(2n+1)}$ est impaire. En particulier, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On écrit la formule de Taylor avec reste intégral de f en 0 : Pour tout $0 \leq x < a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+2)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot x^{2k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+2)}(t)dt \end{aligned}$$

On note $I_{f,2n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+2)}(t)dt$.

Pour tout $0 \leq x < a$, $I_{f,2n+1}(x) \geq 0$. On remarque que, pour tout $0 \leq t \leq x$, $-xt \geq -at$ donc $x(a-t) \geq a(x-t)$ donc $x - t = \frac{x-t}{a-t} \cdot (a-t) \leq \frac{x}{a} \cdot (a-t)$ d'où :

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad I_{f,2n+1}(x) &\leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot f^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} I_{f,2n+1}(a) \\ &\leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} f(a) \end{aligned}$$

En effet, $f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot a^{2k} + I_{f,2n+1}(a) \geq I_{f,2n+1}(a)$ car $f^{(2k)}(0) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme $0 \leq \frac{x}{a} < 1$, on conclue que $I_{f,2n+1}(x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Comme

$$\begin{aligned} I_{f,2n+1}(-x) &= f(-x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}(-x)^{2k} \\ &= f(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \\ &= I_{f,2n+1}(x) \end{aligned}$$

on obtient que pour tout $-a < x < a$, $I_{f,2n+1}(x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

De plus, $I_{f,2n}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = I_{f,2n+1}(x)$

Donc pour tout $-a < x < a$, $I_{f,n}(x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Cas 2 : f est supposée quelconque. On note

$$\begin{aligned} g : [-a,a] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) + f(-t) \end{aligned}$$

Alors $g \in C^\infty([-a,a],\mathbb{R})$ est paire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) + (-1)^{2n} f^{(2n)}(-t) \geq f^{(2n)}(t)$. Donc

$$0 \leq I_{f,2n+1}(x) \leq I_{g,2n+1}(x)$$

pour tout $-a < x < a$. Or, l'étude du cas 1 nous a montré que $I_{g,2n+1}(x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ donc $I_{f,2n+1}(x) \longrightarrow 0$ pour tout $-a < x < a$ par le théorème des gendarmes. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $-a < x < a$,

$$\begin{aligned} I_{f,2n+2}(x) - I_{f,2n+1}(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - f(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \\ &\leq \frac{g^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} \cdot x^{2n+2} \right)_{n \in N} = (g(x) - I_{g,2n+2}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une série convergente d'après l'étude du cas 1. Ainsi, pour tout $-a < x < a$, $I_{f,n}(x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et f est développable en série entière sur $[-a,a]$. □

Théorème. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in I$, $f^{(n)}(t) \geq 0$. Alors, pour tout $x_0 \in I$, il existe un voisinnage de x_0 sur lequel f est développable en série entière.*

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $J := [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. Par hypothèse $f^{(n)}$ est croissante et positive dans I. Ecrivons le développement de Taylor avec reste intégral de f à l'ordre n en x_0 : pour tout $x \in J$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \int_0^1 \frac{(x - tx - (1-t)x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + (x-x_0)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)dt \end{aligned}$$

Or $tx \leq t(x_0 + \epsilon)$ donc par croissance de $f^{(n+1)}$ on a :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \right| &\leq |x-x_0|^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t(x_0+\epsilon) + (1-t)x_0)dt \\ &\leq \frac{|x-x_0|^n}{\epsilon^n} \int_0^1 \epsilon^n \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t(x_0+\epsilon) + (1-t)x_0)dt \\ &\leq \frac{|x-x_0|^n}{\epsilon^n} \cdot I_{f,n}(x_0+\epsilon) \\ &\leq \left(\frac{|x-x_0|}{\epsilon} \right)^n \cdot f(x_0+\epsilon) \end{aligned}$$

En effet, $0 \leq I_{f,n}(x_0+\epsilon) = f(x_0+\epsilon) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x_0+\epsilon-x_0)^k \leq f(x_0+\epsilon)$. Comme $\frac{|x-x_0|}{\epsilon} \leq 1$ pour tout $x_0 + \epsilon < x < x_0 - \epsilon$, on obtient que f converge vers son développement en série de Taylor sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$. □

Leçons concernées :
218 Applications des formules de Taylor
228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme

Références

[1] Pommelet. Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse. Ellipses (pour le théorème 1)

[2] H. Quéfellec, C. Zuily. Agrégation de Mathématiques. Eléments d'analyse. Dunod. (pour le théorème 2)