DEVELOPPEMENT = THEOREME DE BOREL

Théorème de Borel = Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Il existe une fonction g de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $g^{(n)}(0) = a_n$.

Démonstration = Schéma = i) Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $N_p(f) = \max\limits_{0\leq q\leq p} \|f^{(q)}\|_\infty$ si f C^∞ à support compact.
On montre que c'est une norme sur $E = \{$ens des fcts C^∞ à supp. compact$\}$.
ii) On construit une fonction C^∞ φ nulle en dehors de $[-1,1]$, telle que $\varphi(0)=1$ et $\varphi^{(p)}(0) = 0$ si $p \geqslant 1$.
iii) On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} N_n\left(\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)x^{n+1}\right) = 0$, pour $x \in [-1,1]$.
iv) On montre que l'application $g : x \mapsto a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\right) a_n \frac{x^n}{n!}$ convient, où $(\varepsilon_n)_n$ est une suite de réels positifs qu'on construira.

i) Rmq = Si $f \in E$, f et toutes ses dérivées sont continues à support compact donc bornées, ce qui assure l'existence de N_p.
- On a, pour tout $f \in E$ $N_p(f) \geqslant 0$.
Si $f \in E$ est telle que $N_p(f) = 0$ on a en particulier $\|f\|_\infty = 0$ donc $f = 0$.
L'inégalité triangulaire et l'homogénéité découlent de la linéarité de la dérivation et du fait que $\|.\|_\infty$ est une norme.

ii) On définit une fonction f par $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. f est C^∞ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
Montrons qu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour ce faire, montrons par récurrence sur n qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0$ $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$. C'est vrai pour $n = 0$.
Supposons le résultat vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

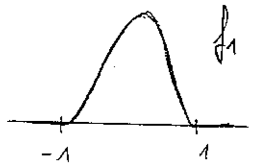
$$\text{On a } f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)x^{2n} - P_n(x)2nx^{2n-1}}{(x^{2n})^2} e^{-1/x} + \frac{P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-1/x}$$

Ça n'apparait pas dans le bouquin.

$$= \frac{P_n'(x)x^2 - 2nxP_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-1/x}$$

On note $P_{n+1}(x) = P_n'(x)x^2 - 2nxP_n(x) + P_n(x)$. On a bien $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.
Montrons maintenant par récurrence sur n que f est C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$n = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ donc f est continue.
Supposons le résultat vrai pour un entier n.
On a $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-1/x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} P_{n+1}\left(\frac{1}{u}\right) u^{2n} e^{-u} = 0$.
De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n+1)}(x) = 0$ car $f = 0$ sur $]-\infty; 0]$.
D'après le théorème sur la limite de la dérivée (voir plus loin) $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}$ est continue en 0.
La fonction f est donc C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Ce qui termine la récurrence.

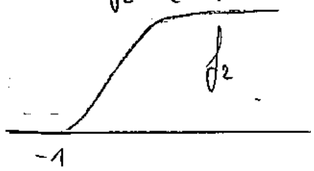
On considère la fonction f_1 définie par $f_1(x)=f(1+x)f(1-x)$, elle est C^∞, paire, nulle en dehors de $[-1,1]$. Par la formule de Leibnitz toutes ses dérivées en -1 et 1 sont nulles.



On définit f_2 par $f_2(x)=\dfrac{\int_{-1}^{x} f_1(t)\,dt}{\int_{-1}^{1} f_1(t)\,dt}$.

La fonction f_2 est de classe C^∞ et à support dans $[-1,1]$.

On a $f_2^{(n)}(-1)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_2(1)=1$ et $f_2^{(n)}(1)=0$ pour tout $n\geq 1$.



On termine en posant $\varphi(x)=\varphi(-x)=f_2(2x+1)$ pour tout $x\leq 0$.

La fonction φ ainsi construite répond à la question posée.

iii) Soient $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$ et $\varphi_{\varepsilon,n} : x\mapsto \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)x^{n+1}$. La fonction $\varphi_{\varepsilon,n}$ est C^∞ et nulle en dehors de $[-\varepsilon,\varepsilon]$.

Soit $p\in\{0,\dots,n\}$, soit $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$. La formule de Leibnitz donne :

$$\varphi_{\varepsilon,n}^{(p)}(x)=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(n+1)n\dots(n+2-k)x^{n+1-k}\,\varphi^{(p-k)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-(p-k)}.$$

On en déduit que $\|\varphi_{\varepsilon,n}^{(p)}\|_\infty \leq N_n(\varphi)\,\varepsilon^{n+1-p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$.

Ceci montre que, pour $0\leq p\leq n$ $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\|\varphi_{\varepsilon,n}^{(p)}\|_\infty=0$ donc en particulier $N_n(\varphi_{\varepsilon,n})\underset{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}{\longrightarrow}0$.

iv) On construit une suite décroissante de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_n$ telle que

$N_n\left(\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)x^{n+1}\right)\leq \min\left(1,\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)$ par récurrence :

On a $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} N_0(\varphi_{\varepsilon,0})=0$ donc il existe $\varepsilon_0>0$ tel que $N_0(\varphi_{\varepsilon_0,0})\leq\min\left(1,\frac{1}{|a_1|}\right)$.

Les réels $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}$ étant choisis, de $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}} N_n(\varphi_{\varepsilon,n})=0$ on déduit l'existence de $\varepsilon_n>0$ tel que $\varepsilon_n<\varepsilon_{n-1}$ et $N_n(\varphi_{\varepsilon_n,n})\leq\min\left(1,\frac{1}{|a_{n+1}|}\right)$.

On pose, pour $x\in\mathbb{R}$ $g_0(x)=a_0$ et $g_n(x)=\varphi_{\varepsilon_{n-1},n-1}(x)\frac{a_n}{n!}$ si $n\geq 1$.

On a, par le choix de la suite $(\varepsilon_n)_n$ $N_{n-1}(g_n)\leq\frac{1}{n!}$.

On en déduit que pour tout $p\in\mathbb{N}$, si $n>p$ $\|g_n^{(p)}\|_\infty\leq\frac{1}{n!}$.

Il en résulte que la série $\sum_n g_n^{(p)}$ est normalement convergente, pour tout p.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions permet de conclure que g est C^∞ et que pour tout $p\in\mathbb{N}$ $g^{(p)}=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n^{(p)}$.

Si $p<n$ on peut mettre en facteur x^{n-p} dans l'expression de $g_n^{(p)}(x)$, on a donc $g_n^{(p)}(0)=0$.
Si $p>n$ $g_n^{(p)}(0)$ est une combinaison linéaire de $\varphi^{(k)}(0)$ avec $k\geq p-n\geq 1$ donc $g_n^{(p)}(0)=0$.
Enfin $g_n^{(n)}(0)=\varphi(0)a_n=a_n$. On en déduit que $g^{(p)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n^{(p)}(0)=g_p^{(p)}(0)=a_p$.