Développement 2 : Classification des formes quadratiques :

Si $\underset{B}{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$; $A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in O_n(\mathbb{K}) \mid B = PA{}^tP$
Classe de A ?

1) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: formes quadratiques Q classifiées par le rang
2) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: classifiées par la signature $(p, r-p)$
où $r = rg(A)$ et p indépendant de A.
3) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$: classifiées par $r = rg(A)$ et $\xi = discrim(A) \in \mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}$
q premier

---

1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Soit A la matrice de Q dans la base canonique $\underline{e}$
Si $Q \neq 0$ alors on peut supposer $Q(e_1) \neq 0$.
Soit $\varepsilon = \sqrt{Q(e_1)} \in \mathbb{C}$. On a alors, si $v_1 = \frac{e_1}{\varepsilon}$: $Q(v_1) =$
D'autre part, puisque $Q|_{\mathbb{C}v_1}$ est non dégénérée on a
$(\mathbb{C}v_1) \oplus (\mathbb{C}v_1)^\perp = E$. Ainsi en prenant $(e_2', \dots, e_n')$
une base de $(\mathbb{C}v_1)^\perp$; la matrice de Q dans la base
$(v_1, e_2', \dots, e_n')$ s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & (A') \\ 0 & \end{pmatrix}$$ avec $A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

et par récurrence on construit une base
$(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ orthogonale pour Q dans
laquelle la matrice de Q vaut :
$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$$ avec $r = rg(Q)$
$= rg(A)$

---

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: On fait le même raisonnement, mais cette fois-ci
avec $\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{Q(e_1)} \text{ si } Q(e_1) > 0 \\ \sqrt{-Q(e_1)} \text{ si } Q(e_1) < 0 \end{cases}$ De sorte que si $v_1 = \frac{e_1}{\varepsilon}$
on a $Q(v_1) = \pm 1$.
On obtient donc une base orthogonale $\{v_1, \dots, v_n\}$
telle que $Q(v_i) = \pm 1$ si $i \in \{1, \dots, r\}$. Quitte à changer
l'ordre des vecteurs de base on peut supposer
$Q(v_1) = \dots = Q(v_p) = 1$ et $Q(v_{p+1}) = \dots = Q(v_r) = -1$
pour un certain $p \leq r$. La matrice de Q dans
la nouvelle base est alors :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & (0) & (0) \\ \hline (0) & -I_{n-p} & (0) \\ \hline (0) & (0) & (0) \end{array}\right)$$

Il nous reste à montrer que l'entier p ne dépend pas de la base choisie. Soient $(v_1, \dots, v_n)$ et $(w_1, \dots, w_n)$ deux bases comme ci-dessus et soient p et p' leurs entiers associés.

$F = \langle v_1, \dots, v_p \rangle \qquad F' = \langle w_1, \dots, w_{p'} \rangle$

$G = \langle v_{p+1}, \dots, v_n \rangle \qquad G' = \langle w_{p'+1}, \dots, w_n \rangle.$

On a : $Q|_F > 0$; $Q|_{G'} < 0$ donc $F \cap G' = \{0\}$.

donc $\underbrace{\dim(F+G')}_{\leq n} = \underbrace{\dim(F)}_{=p} + \underbrace{\dim(G')}_{=n-p'}$ $\Rightarrow n \geq p+n-p'$; $0 \geq p-p'$

Donc $p \leq p'$

De même avec F' et G on trouve $p' \leq p$.

Donc $p' = p$.

---

3) <u>Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$</u> : <u>Lemme</u> : Si $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ alors l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a une solution $(x,y) \in \mathbb{F}_q^2$

<u>Dém</u> : On a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$

donc $\#\{ax^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\} = \frac{q+1}{2}$

$\#\{1 - by^2 \mid y \in \mathbb{F}_q\} = \frac{q+1}{2}$

Donc $\{ax^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\} \cap \{1 - by^2 \mid y \in \mathbb{F}_q\} \neq \emptyset$.

Par les mêmes arguments que dans 1) et 2), on montre que dans une certaine base la matrice de Q s'écrit. $\begin{pmatrix} \theta_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \theta_r & \\ (0) & & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$; $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{F}_q^*$

On se ramène donc au cas où Q est non dégénéré et soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthogonale de E telle que $Q(f_i) = \theta_i \in \mathbb{F}_q^*$.

- Si $n \geq 2$ alors $\langle f_1, f_2 \rangle$ libre et $\theta_1 x^2 + \theta_2 y^2 = 1$ admet une solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{F}_q^2$ d'après le lemme. Donc $Q(\lambda f_1 + \mu f_2) = 1$. et si $f_2', \dots, f_n'$ est une base de $(\mathbb{C}\lambda f_1 + \mu f_2)^\perp$ la matrice de Q dans la base $f_2', \dots, f_n', \lambda f_1 + \mu f_2$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & (A') \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec A' symétrique

Donc par récurrence on trouve une base orthogonale dans laquelle la matrice de Q s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & 1 & \theta \end{pmatrix}$. On note $\mathbb{F}_q^* / \mathbb{F}_q^{*2} = \{1, \zeta\}$ où ζ est un non carré de $\mathbb{F}_q^*$.

$\theta = \det(A)$ est un carré a^2 ou s'écrit $a^2 \times \zeta$. En divisant le dernier vecteur de base par a on obtient $A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ ou $A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & 1 & \zeta \end{pmatrix}$

$(\zeta = \det(A) \in \mathbb{F}_q^* / \mathbb{F}_q^{*2})$