DEVELOPPEMENT = Théorème de Féjer.

THEOREME = Soit f une application continue 1 périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \frac{1}{n}(S_0(f) + \dots + S_n(f))$ où $S_j(f)$ est la j ième somme partielle d'indice j de la série de Fourier de f.
Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration = Schéma : i) On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ $k_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{2ik\pi x}$.
On montre que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$
on a $f_n(x) = \int_0^1 k_n(x-y)f(y)dy = (k_n * f)(x)$.

ii) On montre que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

i) Soit $l \in \mathbb{Z}$, on note $c_l(f) = \int_0^1 f(y)e^{-2i\pi l y}dy$ le l ième coefficient de Fourier de f.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$

$$S_k(f)(x) = \sum_{l=-k}^{k} c_l(f)\, e^{2i\pi l x} = \sum_{l=-k}^{k}\int_0^1 f(y)e^{2i\pi l(x-y)}dy = \int_0^1 f(y)\left(\sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l(x-y)}\right)dy$$

On a donc :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x) = \int_0^1 f(y)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l(x-y)}\right)dy.$$

Notons $L_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l x}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

En échangeant les deux sommations on obtient $L_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{l=-(n-1)}^{n-1}(n-|l|)e^{2i\pi l x} = \sum_{l=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|l|}{n}\right)e^{2i\pi l x} = k_n(x)$.

On a donc bien $f_n(x) = \int_0^1 f(y)\, k_n(x-y)dy = (f * k_n)(x)$.

ii) Montrons tout d'abord que k_n est positif et vérifie $\int_0^1 k_n(x)dx = 1$.
Notons, pour $k \in \mathbb{N}$ $d_k(x) = \sum_{l=-k}^{k} e^{2i\pi l x}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $k_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d_k(x)$ d'après i).
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{2i\pi x} \neq 1$.
On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $d_k(x) = e^{-ikx}\left(\frac{e^{2i\pi(2k+1)x} - 1}{e^{2i\pi x} - 1}\right) = \frac{e^{2i\pi(k+1)x} - e^{-2i\pi k x}}{e^{2i\pi x} - 1}$.

On en déduit que

$$k_n(x) = \frac{1}{n(e^{2i\pi x}-1)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi(k+1)x} - e^{-2i\pi k x}\right)$$

$$= \frac{1}{n(e^{2i\pi x}-1)}\left(\frac{e^{2i\pi x}(e^{2i\pi n x}-1)}{e^{2i\pi x}-1} - \frac{e^{-2i\pi n x}-1}{e^{-2i\pi x}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{n(e^{2i\pi x}-1)^2}\left(e^{2i\pi x}(e^{2i\pi n x}-1) + e^{2i\pi x}(e^{-2i\pi n x}-1)\right)$$

$$= \frac{e^{2i\pi x}}{n(e^{2i\pi x}-1)^2}\left(e^{2i\pi n x} + e^{-2i\pi n x} - 2\right)$$

$$= \frac{e^{2i\pi x}}{n\left(e^{2i\pi x}(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})^2\right)}\left(2\cos(2\pi n x) - 2\right) = \frac{2\cos(2\pi n x) - 2}{n\,(2i\sin(\pi x))^2} = \frac{\sin^2(\pi n x)}{n\sin^2(\pi x)}.$$

Si maintenant x est tel que $e^{2i\pi x} = 1$ on a $K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} 1 = \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = n$.

La fonction K_n est bien positive.

On a $\int_0^1 K_n(x)\,dx = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k}}_{\text{inutile}} \underbrace{\int_0^1 e^{2i\pi l x}\,dx}_{0 \text{ si } l\neq 0} = \Big) \frac{1}{n}\sum_{l=-(n-1)}^{n-1}(n-|l|)\int_0^1 e^{2i\pi l x}\,dx = \frac{n}{n} = 1.$

Revenons à f_n.

soit $x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) = \int_0^1 K_n(x-y)f(y)\,dy \overset{t=x-y}{=} -\int_x^{x-1} K_n(t)f(x-t)\,dt = \int_{x-1}^{x} K_n(t)f(x-t)\,dt$

$$= \int_0^1 K_n(t)f(x-t)\,dt$$

K_n et f sont 1-périodiques.

On a donc $f_n(x) - f(x) = \int_0^1 K_n(t)f(x-t)\,dt - f(x)\int_0^1 K_n(t)\,dt$

$$= \int_0^1 K_n(t)\big(f(x-t) - f(x)\big)\,dt.$$

Puisque K_n est positive on en déduit que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_0^1 K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt.$$

La fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ puisque continue et 1 périodique.

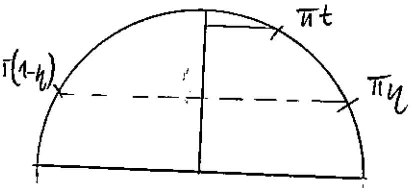
Pour $\varepsilon > 0$ $\exists\, \eta \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ si $|x-y| \leq \eta$.

On a alors :

$$\int_0^\eta K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \leq \varepsilon\int_0^\eta K_n(t)\,dt \leq \varepsilon$$

$$\int_{1-\eta}^1 K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \underset{\text{astuce}}{=} \int_{1-\eta}^1 K_n(t)\,|f(x-t) - f(x-1)|\,dt \leq \varepsilon\int_{1-\eta}^1 K_n(t)\,dt \leq \varepsilon.$$

Si $t \in [\eta ; 1-\eta]$, comme $0 < \pi\eta < \frac{\pi}{2}$ on est dans la configuration suivante :



Ainsi $\sin(\pi t) \geq \sin(\pi\eta)$ donc $\frac{1}{\sin^2(\pi t)} \leq \frac{1}{\sin^2(\pi\eta)}$.

On a donc $K_n(t) = \frac{\sin^2(\pi n t)}{n\sin^2(\pi t)} \leq \frac{1}{n\sin^2(\pi t)} \leq \frac{1}{\sin^2(\pi\eta)\times n}$.

On en déduit que $\int_\eta^{1-\eta} K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\sin^2(\pi\eta)}$.

donc $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\int_\eta^{1-\eta} K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \leq \varepsilon$.

Si $n \geq n_0$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.