Lemme de Kronecker, Loi Forte des Grands Nombres

15 mai 2013

Dans la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie associée à la valeur absolue. Dans la suite, on ne considère que des suites indexées sur $\mathbb{N}^*$: lorsqu'on notera $(x_n)_n$ une suite, on signifiera en fait $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Lemme. *(Césàro) : Soit $(x_n)_n$ une suite de réels convergeant vers x quand n tend vers l'infini. La suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ converge vers x.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ quelconque et $N \in \mathbb{N}$ de sorte que pour tout $n \geq N$, $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit $M(N) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M(N)$, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} |x_j - x| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. On a pour tout $n \geq \max(N, M(N))$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} |x_j - x| + \frac{1}{n}\sum_{j=N+1}^{n} |x_j - x| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

d'où le résultat. □

Lemme. *(Kronecker) : Soient une série de terme général x_n convergente et une suite croissante $(b_n)_n$ de réels tendant vers l'infini quand n tend vers l'infini. On a alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0$$

Démonstration. On note $S = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = S - \sum_{j=1}^{n} x_j$, telle que $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $x_n = S_n - S_{n+1}$ donc, par transfomation d'Abel, pour tous entiers n et N tels que $n > N \geq 2$,

$$\sum_{j=N}^{n} b_j x_j = \sum_{j=N}^{n} b_j (S_j - S_{j+1}) = S_N b_N - b_n S_{n+1} - \sum_{j=N+1}^{n} S_j (b_j - b_{j-1})$$

soit, dès que $b_n > 0$,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{N-1} b_j x_j + S_N \frac{b_N}{b_n} - S_{n+1} - \frac{1}{b_n}\left(\sum_{j=N+1}^{n} S_j (b_j - b_{j-1})\right)$$

La suite de terme général $\dfrac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{N-1} b_j x_j + S_N \dfrac{b_N}{b_n} - S_{n+1}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_N > 0$ et pour tout $n \geq N$, $|S_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit $M(N) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\left|\dfrac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{N-1} b_j x_j + S_N \dfrac{b_N}{b_n} - S_{n+1}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

On a pour tout $n \geq \max(N, M(N))$,

$$\left|\sum_{j=N+1}^{n} S_j (b_j - b_{j-1})\right| \leq \sum_{j=N+1}^{n} |S_j| (b_j - b_{j-1}) \leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{j=N+1}^{n} (b_j - b_{j-1}) = \frac{\epsilon}{2}(b_n - b_N)$$

d'où $\left| \frac{1}{b_n} \left(\sum_{j=N}^{n-1} S_j (b_{j+1} - b_J) \right) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}(1 - \frac{b_N}{b_n}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ et le résultat s'ensuit. □

Proposition. *Inégalité de Kolmogorov : Soient $X_1, \dots, X_n \in L^2$ des variables aléatoires telles que $E[X_j] = 0$ pour tout j. On note $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma_j^2$ pour tout j. Alors pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} X_i \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \right)$$

Démonstration. admis (voir Ouvrard) □

Proposition. *Soit $(X_n)_n \subset L^2$ une suite de variable aléatoires réelles indépendantes telle que $E[X_n] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$ pour tout n. Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n^2 < +\infty$, la série $S_m = \sum_{j=1}^{m} X_j$ converge P-presque sûrement et dans L^2.*

Démonstration. On note $A_m = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |S_{m+k} - S_m|$ et $A = \inf_{m \in \mathbb{N}^*} A_m$. Par le critère de Cauchy, on a $\{\sum X_n \text{ converge}\} = \{A = 0\}$. Mais on a $\{A \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ A > \frac{1}{n} \right\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{A > \frac{1}{n}\right\} \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ A_m > \frac{1}{n} \right\}$ d'où $\{A \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ A_m > \frac{1}{n} \right\}$. La suite d'ensemble $B_r = \left\{ \sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n} \right\}$ est croissante et

$$\left\{ A_m > \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n} \right\}$$

On a d'après l'inégalité de Kolmogorov :

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n} \right) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{m+r} \sigma_j^2 \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{+\infty} \sigma_j^2$$

Comme $(B_r)_r$ est une suite croissante, on a :

$$P\left(A_m > \frac{1}{n} \right) = \lim_{r \to \infty} P\left(\sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n} \right) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{+\infty} \sigma_j^2$$

d'où, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq P\left(\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \left\{ A_p > \frac{1}{n} \right\} \right) \leq P\left(A_m > \frac{1}{n} \right) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{+\infty} \sigma_j^2 \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $P(A \neq 0) = 0$ ce qui achève la preuve.

Comme $E[(S_m - S_n)^2] = \sum_{j=n+1}^{m} E[X_j^2] = \sum_{j=n+1}^{m} \sigma_j^2 \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, $(S_m)_m$ est une suite de Cauchy dans L^2 qui est complet d'après le théorème de Riesz-Fischer donc $(S_m)_m$ converge dans L^2. □

Théorème. *Loi Forte des Grands Nombres : Soit $(X_n)_n \subset L^2$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $E[X_n] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} m$ et $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \sigma_j^2 < +\infty$. Alors, la suite de variables aléatoires $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ converge P-presque sûrement et dans L^2 vers m.*

Démonstration. D'après le lemme de Césàro, $E[\overline{X_n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$. Les variables aléatoires $Y_n = \frac{X_n - E[X_n]}{n}$ sont indépendantes, centrées et de variance $\sigma_{Y_n}^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_n^2$ donc

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_{Y_j}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}\sigma_j^2 < +\infty$$

ce qui, d'après la proposition précédente, montre la convergence presque sûre de la série de terme général Y_n. Le lemme de Kronecker assure que la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} jY_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j]$ converge P-presque sûrement vers 0 donc que $\overline{X_n}$ converge P-presque sûrement vers $m = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j]$.

Par indépendace des variables aléatoires, on a $E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - E[X_j])\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le lemme de Kronecker et l'hypothèse. Or, $\overline{X_n} - m = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}(X_j - E[X_j]) + \dfrac{1}{n}\sum_{j=1} E[X_j] - m$ donc par l'inégalité triangulaire, $E\left[\left(\overline{X_n} - m\right)^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Leçons concernées :

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

235 Suites et séries de fonctions intégrables.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

250 Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.

251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Références

[1] Jean-Yves Ouvrard. Probabilités 2. Cassini