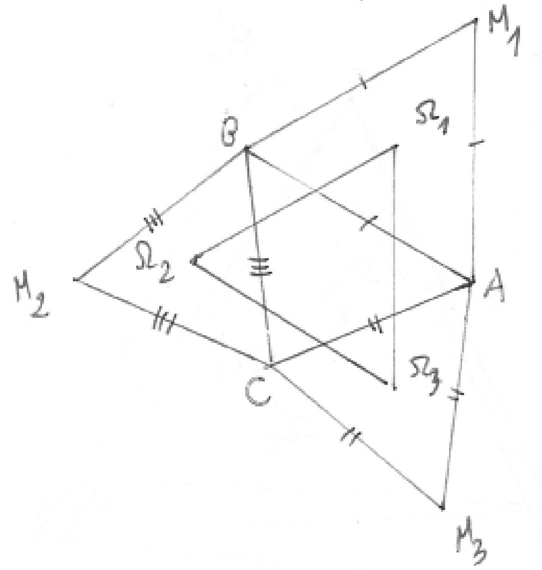
Théorème de Napoléon :
Soit ABC un triangle quelconque et soient M_1 M_2 M_3 extérieurs aux triangles tels que ABM_1 BCM_2 et ACM_3. On note Ω_1 Ω_2 Ω_3 les centres de gravité des triangles construits. Alors, le triangle $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ est équilatéral et son centre de gravité est celui d'ABC.

Preuve : On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ $a, b, c, m_1, m_2, m_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ les affixes de A, B, C, M_1, M_2, M_3, $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$



A est l'image de B par la rotation de centre Ω_1 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ d'où $(a-\omega_1) = j(b-\omega_1)$. De même $(b-\omega_2) = j(c-\omega_2)$
$(c-\omega_3) = j(a-\omega_3)$

On en déduit
$$\begin{cases} (1-j)\omega_1 = a - jb \\ (1-j)\omega_2 = b - jc \\ (1-j)\omega_3 = c - ja \end{cases}$$

Rappel : $j^3 = e^{\frac{3.2i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$ $\quad j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{j}$

$$1 + j^2 + j = 1 + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right) + i\left(\sin\tfrac{2\pi}{3} + \sin\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + i(0) = 0$$

donc
$$\begin{aligned}(1-j)(\omega_3-\omega_1) &= (-1-j)a + c + jb = j^2 a + jb + c \\ &= j^2 a + j^2 \cdot \tfrac{1}{j} b + j^3 c = -j^2\left(-a - \left(\tfrac{1}{j}\right)b - jc\right) \\ &= -j^2\left(-a + (1+j)b - jc\right) = -j^2\left((b-jc) - (a-jb)\right) \\ &= -j^2\left((1-j)\omega_2 - (1-j)\omega_1\right) = -j^2(1-j)(\omega_2-\omega_1)\end{aligned}$$
$$\iff \omega_3 - \omega_1 = -j^2(\omega_2-\omega_1) = -e^{\frac{4i\pi}{3}}(\omega_2-\omega_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(\omega_2-\omega_1)$$

Conclusion : Ω_3 est l'image de Ω_2 par la rotation de centre Ω_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ est équilatéral.

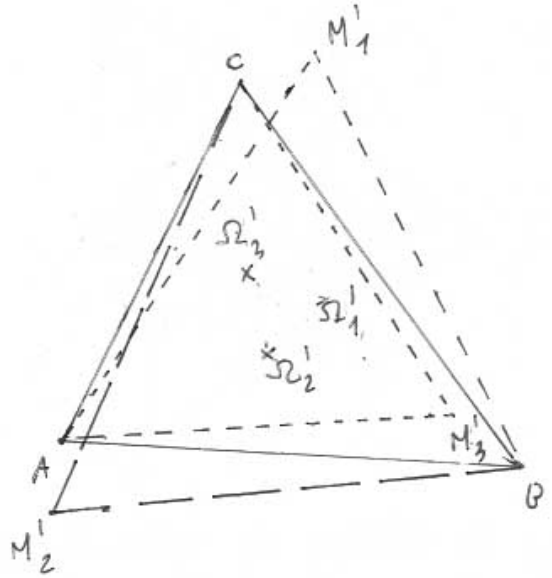
De plus, $(1-j)(\omega_1+\omega_2+\omega_3) = a - jb + b - jc + c - ja$

$$= (1-j)(a+b+c)$$

d'où $$\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

donc les centres de gravité sont les mêmes.

De la même manière, on obtient un résultat similaire avec les triangles intérieurs :



Proposition : $\mathcal{A} := |\mathcal{A}_{\Omega_1\Omega_2\Omega_3} - \mathcal{A}_{\Omega_1'\Omega_2'\Omega_3'}| = \mathcal{A}_{ABC}$

Preuve : comme précédemment : $\begin{cases} (b-\omega_1') = j(a-\omega_1') \\ (c-\omega_2') = j(b-\omega_2') \\ (a-\omega_3') = j(c-\omega_3') \end{cases} \iff \begin{cases} (1-j)\omega_1' = b - ja \\ (1-j)\omega_2' = c - jb \\ (1-j)\omega_3' = a - jc \end{cases}$

on sait (formule de l'aire d'un triangle équilatéral) que : $\mathcal{A}_{\Omega_1\Omega_2\Omega_3} = \frac{\sqrt{3}}{4}|\omega_1-\omega_2|^2$

d'où $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(|\omega_1-\omega_2|^2 - |\omega_1'-\omega_2'|^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4|1-j|^2}\left(|b-a-j(c-b)|^2 - |(c-b)-j(b-a)|^2\right)$

comme $\bar{j} = j^2$ on a
et $j^2 = -1-j$

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4|1-j|^2}\left(\left(b-a-j(c-b)\right)\left(\overline{b-a} - j^2\overline{(c-b)}\right) - (c-b-j(b-a))(\overline{c-b} - j^2\overline{(b-a)}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4|1-j|^2}\Big(|b-a|^2 + |c-b|^2 + (1+j)(b-a)\overline{(c-b)} - j(c-b)\overline{(b-a)} - |c-b|^2 - |b-a|^2$$
$$- (1+j)(c-b)\overline{(b-a)} + j(b-a)\overline{(c-b)}\Big)$$

On $-j = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $|1-j|^2 = |1+e^{\frac{i\pi}{3}}|^2 = \left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$ d'où

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left((1+2j)(b-a)\overline{(c-b)} - (1+2j)\overline{(b-a)}(c-b)\right)$$

et, comme $2j = -1+i\sqrt{3}$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\, i\sqrt{3}\left((b-a)\overline{(c-b)} - (c-b)\overline{(b-a)}\right) = \frac{1}{4i}\left((c-b)\overline{(b-a)} - (b-a)\overline{(c-b)}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left((a-b)\overline{(c-b)} - \overline{(a-b)}(c-b)\right)$$

on pose $z = a-b$, $z' = c-b$

$z = x+iy$, $z' = x'+iy'$

$\mathcal{A} = \frac{1}{4i}(z\bar{z}' - \bar{z}z') = \frac{1}{4i}\left((x+iy)(x'-iy') - (x-iy)(x'+iy')\right) = \frac{2i}{4i}(xy' - x'y) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ qui est l'aire algébrique de ABC, ce qui achève la preuve.