Méthode de Newton

2 juin 2013

Le but de la méthode de Newton est d'approcher les solutions d'une équation du type $f(x) = 0$ où f est une fonction réelle à valeurs réelles. Elle consiste à itérer une suite.

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que, si on pose $R := [a-r, a+r]$, $f_{|R} \in C^2(R, \mathbb{R})$ et tel que $f'(x) \neq 0$ et $f"(x) \neq 0$ pour tout $x \in R$. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} R & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$, $M = \max_{x \in R} \left| \frac{f"(x)}{f'(x)} \right|$, $h = \min(r, \frac{1}{M})$ et $H := \begin{cases} [a, a+h] & si\ f'(a)f"(a) > 0 \\ [a-h, a] & si\ f'(a)f"(a) < 0 \end{cases}$. Alors :*

1) a est l'unique point fixe de φ dans R.

2) H est stable par φ

3) Pour tout $x \in H$, $|\varphi(x) - a| \leq M(x-a)^2$

4) La suite définie par $\begin{cases} x_0 \in [a, a+h] & si\ f'(a)f"(a) > 0 \\ x_0 \in [a-h, a] & si\ f'(a)f"(a) < 0 \\ x_{n+1} = \varphi(u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ vérifie $|x_n - a| \leq \frac{1}{M} \left(M |x_0 - a|\right)^{2n}$. En particulier, elle converge quadratiquement vers a.

On suppose que $f'_{|R} > 0$. En effet, si $f'_{|R} < 0$, on pose $g = -f$ et on étudie g. On commence par démontrer deux lemmes :

Lemme 1. *On pose pour tout $x \in R$, $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors $|u(x)| \leq \frac{1}{M}\left(e^{M|x-a|} - 1\right)$ pour tout $x \in R$.*

Démonstration. u est bien définie d'après les hypothèses du théorème et est dérivable sur R avec : $u'(x) = 1 - \frac{f"(x)f(x)}{(f'(x))^2} = 1 - u(x)\frac{f"(x)}{f'x)}$ d'où $|u'(x)| \leq 1 + M|u(x)|$. f est croissante sur R et $f(a) = 0$ donc $f(x)$ a le même signe que $(x-a)$ pour tout $x \in R$. Ainsi, $u(x)$ a le même signe que $(x-a)$. Pour tout $x \geq a$, on a donc $u(x) \geq 0$ d'où $u(x) \leq 1 + Mu(x)$. On pose $v(x) = u(x)e^{-Mx}$. v est dérivable et $v'(x) = (u'(x) - Mu(x))e^{-Mx} \leq e^{-Mx}$. En intégrant cette inégalité entre a et x et en constatant que $v(a) = 0$, on a $v(x) \leq \frac{1}{M}\left(e^{-Ma} - e^{-Mx}\right)$ et on obtient $u(x) = v(x)e^{Mx} \leq \frac{1}{M}\left(e^{M(x-a)} - 1\right) = \frac{1}{M}\left(e^{M|x-a|} - 1\right)$. De même, pour $x \leq a$, en posant, $v(x) = -u(x)e^{-Mx}$, on obtient pour tout $x \in R$, $|u(x)| \leq \frac{1}{M}\left(e^{M|x-a|} - 1\right)$. □

Lemme 2. *Pour tout $t \in [-1, 1]$, $e^{|t|} \leq 1 + 2|t|$.*

Démonstration. Pour tout $s \in [0, 1]$, on a par inégalité de convexité appliquée à la dérivée de l'exponentielle en s et à ses valeurs en 1 et en 0, $e^s \leq 1 + (e-1)s < 1 + 2s$ et par symétrie de la valeur absolue, on conclut. □

A présent, on peut démontrer le théorème

Démonstration. 1) $\varphi(a) = a - 0 = a$. De plus, si $x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ alors $f(x) = 0$ et $x = a$ car $f' > 0$ sur R.

2) Supposons que $f"(a) > 0$. Soit $x \in [a, a+h]$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) - a &= x - a - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in [a, x]$ tel que $f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) = f"(c)\frac{(x-a)^2}{2} \geq 0$ car $f"(c)$ est du même signe que $f"(a)$ car $f"$ ne s'annule pas sur $H \subset R$. Ainsi $\varphi(x) - a \geq 0$ car $f'(x) > 0$ sur $H \subset R$ et $\varphi(x) - a = \frac{f"(c)(x-a)^2}{2f'(x)} \underset{(a)}{\leq} \frac{f"(c)}{f'(c)} \cdot \frac{h^2}{2} \leq \frac{Mh^2}{2} \underset{(b)}{\leq} \frac{h}{2}$ car

(a) : $c \leq x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$ et
(b) : $h \leq \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{h} \geq M$. Ainsi, $\varphi(x) \in [a, a + \frac{h}{2}]$ et H est stable par φ.
De même si $f"(a) < 0$, on montre que $\varphi(x) \in [a - \frac{h}{2}, a]$ pour tout $x \in H$.

3) $\varphi'(x) = u(x)\frac{f"(x)}{f'(x)}$. Le lemme 1, nous donne $|\varphi'(x)| \leq M\,|u(x)| \leq e^{M|x-a|} - 1$ d'où, par le lemme 2, $|\varphi'(x)| \leq 2M\,|x - a|$ pour $|x - a| \leq \min(r, \frac{1}{M}) = h$. On intègre cette inégalité entre a et x sur $[a - h, a + h]$, ce qui donne

$$|\varphi(x) - a| = |\varphi(x) - \varphi(a)| \quad = \quad \left|\int_a^x \varphi'(t)dt\right| \leq \int_a^x |\varphi'(t)|\,dt \leq M(x - a)^2$$

4) Par récurrrence immédiate $x_n \in H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car H est stable par φ. De plus, par le point 3), on a $(x_{n+1} - a) \leq M(x_n - a)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par une récurrence immédiate $(x_n - a) \leq \frac{1}{M}(M(x_0 - a))^{2n}$. $\square$

Leçons concernées :
223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
232 Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

Références

[1] Jean-Pierre Demailly. Analyse numérique. Grenoble Sciences.