Simplicité de A_n pour $n \geq 5$

12 mai 2013

Proposition. *Soit $n \geq 5$. Alors :*
1) A_n est engendré par les produits de 2 2-cycles.
2) A_n est engendré par les 3-cycles.

Démonstration. 1) On sait que tout élément de S_n s'écrit comme produit de cycles à support disjoints. Soient $(a_1, \ldots, a_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$ deux à deux différents et $(a_1\, a_2\, \cdots\, a_p) \in S_n$ un cycle. Alors,

$$(a_1\, \cdots\, a_n) = (a_1\, a_2)(a_2\, a_3) \cdots (a_{p-1}\, a_p)$$

. En particulier, les 2-cycles engendrent S_n. Soit $\sigma \in A_n$. D'après ce qui précède, σ s'écrit comme produit de $m \in \mathbb{N}$ 2-cycles. Or, $1 = \epsilon(\sigma) = (-1)^m$ donc $m \in 2\mathbb{N}$ et σ est le produit d'un nombre pair de 2-cycles. En particulier, les produits de 2 2-cycles engendrent A_n.

2) On sert de ce qui précède en remarquant que si $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, \ldots, n\}$ sont 2 à 2 différents, $(a_1\, a_2)(a_1\, a_2) = 1_{A_n}$ est le produit de 0 3-cycle. $(a_1\, a_2)(a_2\, a_3) = (a_1\, a_2\, a_3)$ est un 3-cycle et $(a_1\, a_2)(a_3\, a_4) = (a_1\, a_4\, a_3)(a_3\, a_1\, a_2)$ est le produit de 2 3-cycles. Ainsi, tout produit de 2 2-cycles peut s'écrire comme un produit de 3-cycles donc d'après le petit 1), les 3-cycles engendrent A_n. $\square$

Lemme. *Soit $n \geq 5$. Les 3-cycles sont conjugués dans A_n. Les produits de 2 2-cycles sont conjugués dans A_n.*

Démonstration. Soit \sigma un 3-cycles de A_n et $\tau \in S_n$ tels que $\sigma = \tau(123)\tau^{-1}$. Si $\tau \notin A_n$, on pose $\tau' = \tau(45)$. Alors on a $\sigma = \tau'(123)\tau'^{-1}$. Soit σ un produit de deux cycles et $\tau \in S_n$ tel que $\sigma = \tau(12)(34)\tau^{-1}$. Si $\tau \notin A_n$, on pose $\tau' = \tau(12)$ et on obtient $\sigma = \tau'(12)(34)\tau'^{-1}$. $\square$

Théorème. *Soit $n \geq 5$. A_n est simple.*

Démonstration. Cas $n = 5$. A_5 contient 6 5-Sylows. En effet, le nombre N_5 de 5-Sylows vérifie $N_5 \equiv 1[5]$, $N_5 \mid 12$ et $N_5 \neq 1$ car $\langle(12345)\rangle \neq \langle(12354)\rangle$.

A_5 est composé de l'identité, de produits de 2-cycles, de 3-cycles et de 5-cycles.

Soit $\{1_{A_n}\} \subsetneq H \lhd A_5$. D'après le lemme précédent, si H contient un 3-cycle (respectivement un produit de 2 2-cycles), alors il contient tous les 3-cycles (respectivement tous les produits de 2 2-cycles). Or, les 3 cycles (respectivement les produits de 2 2-cycles) engendrent A_5 donc si H contient un 3-cycle ou un produit de 2 2-cycles, alors $H = A_n$. Supposons que H ne contienne aucun 3-cycle et aucun produit de 2 2-cycles. Alors, comme $H \neq \{1_{A_n}\}$, H contient nécessairement un 5-cycle donc H contient le 5-Sylow engendré par ce 5-cycle. D'après la remarque précédente, il contient tous les 5-Sylows, qui s'intersectent 2 à 2 en $\{1_{A_n}\}$ (car chaque élément différent de 1_{A_n} engendre le 5-Sylow : si deux 5-Sylow ont en commun un élément différent de 1_{A_n} ils sont égaux). H contient donc l'identité et les 4 éléments différents de l'identité de chacun des 6 5-Sylows : $\mid H \mid \geq 4 \times 6 + 1 = 25$. Or $25 \nmid 60$ et $|H| \mid 60$ car H est un sous-groupe de A_n donc H contient un élément différent d'un 5-cycle et de l'identité : il s'agit soit d'un 3-cycle, soit d'un produit de 2 2-cycles donc $H = A_n$.

Cas $n > 5$. Soit $\{1_{A_n}\} \subsetneq H \lhd A_n$ et $\sigma \in H \backslash \{1_{A_n}\}$. Alors il existe $a, b \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $b = \sigma(a) \neq a$. Il existe $c \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{a, b, \sigma(b)\}$ tel que $\tau = (acb) \in A_n$ et $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \neq 1_{A_n}$. En effet, si $d \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{a, b, \sigma(b)\}$ vérifie $1_{A_n} = (adb)\sigma(adb)^{-1}\sigma^{-1} = (adb)(\sigma(a)\sigma(b)\sigma(d)) = (adb)(b\,\sigma(b)\,\sigma(d))$ alors $\sigma(d) = a$ et $\sigma(b) = d$, on prend alors $c \in \{1, \cdots, n\} \setminus (\{a, b, d\} \cup \{\sigma(b)\})$ et on a bien $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \neq 1_{A_n}$.

$\rho \in H$ car $\sigma \in H$, $\tau \in A_n$ en tant que 3-cycle et $H \lhd A_n$. De plus, $\rho = (abc)(\sigma(a)\,\sigma(b)\,\sigma(c)) = (abc)(b\,\sigma(b)\,\sigma(c)) \neq 1_{A_n}$.

On pose $F = \{a, b, c\} \cup \{\sigma(b), \sigma(c)\}$.

Par construction $3 \leq \mathrm{card}(F) \leq 5$ et $\mathrm{supp}\rho = F$. On pose $\alpha, \beta \in \{1, \cdots, n\}$ et $F' = \{a, b, c\} \cup \{\alpha, \beta\} \cup \{\sigma(b), \sigma(c)\}$ tels que $\mathrm{card}F' = 5$ et $\mathrm{supp}\rho \subset F'$. On construit $A := \{\delta \in A_n \mid \mathrm{supp}\delta \subset F'\}$.

On remarque que $A \simeq A_5$ en posant l'isomorphisme $\phi : \begin{cases} A \rightarrow & A_{F'} \\ \delta \mapsto & \delta_{|F'} \end{cases}$ et en constatant que $A_{F'} \simeq A_5$ de manière naturelle. Ainsi, A est simple.

Comme $H \lhd A_n$, $A \cap H$ est distingué dans A. De plus, $1_{A_n} \neq \rho \in A \cap H$ donc $A \cap H = A$ et $A \subset H$. Or, A contient un 3-cycle donc$H$ également. Comme $H \lhd A_n$, d'après le lemme, H contient tous les 3-cycles. Or, les 3-cycles engendrent A_n donc $H = A_n$. □

Leçons concernées :

103 Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
104 Groupes finis. Exemples et applications.
105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Références

[1] Algèbre L3. Aviva Szpirglas. Pearson Education.