Théorème limite central

18 mai 2013

Dans la suite, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On considère toutes les suites indexées sur $\mathbb{N}^*$. Pour une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on note $\varphi_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & E[e^{itX}] \end{array}$ sa fonction caractéristique.

Lemme. *Si la variable aléatoire X admet un moment d'ordre deux, sa fonction caractéristique φ_X admet un limité d'ordre deux en 0 donné par, pour tout réel t,*

$$\varphi_X(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2] + o(t^2)$$

Plus précisément, on a l'inégalité, pour tout réel t,

$$\left|\varphi_X(t) - \left(1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2]\right)\right| \leq t^2 E\left[\min\left(X^2, |t|\frac{|X|^3}{6}\right)\right]$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral àl'ordre 2 en 0 de l'exponentielle : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = 1 + ix - x^2 \int_0^1 (1-u)e^{iux}du$$

Comme $\int_0^1 (1-u)du = \frac{1}{2}$, on a $e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right) = -x^2 \int_0^1 (1-u)(e^{iux} - 1)du$ d'où

$$\begin{array}{rcl} \left|e^{ix} - \left(1 + ix - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| & \leq & x^2 \displaystyle\int_0^1 |1-u| \left|e^{iux} - 1\right| du \\ & \leq & 2x^2 \displaystyle\int_0^1 (1-u)du \\ & \leq & x^2 \end{array}$$

A l'ordre 3, on obtient $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-u)^2 e^{iux}du$. Il résulte que

$$\begin{array}{rcl} \left|e^{ix} - \left(1 + ix - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| & \leq & \dfrac{|x|^3}{2} \displaystyle\int_0^1 |1-u|^2 \left|e^{iux}\right| du \\ & \leq & \dfrac{|x|^3}{2} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^2 du \\ & \leq & \dfrac{|x|^3}{6} \end{array}$$

On a donc pour tout réel x, $\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \min\left(x^2, \frac{|x|^3}{6}\right)$ donc $\left|\varphi_X(t) - \left(1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2]\right)\right| \leq t^2 E\left[\min\left(X^2, |t|\frac{|X|^3}{6}\right)\right]$. Or, $|t|\frac{|X|^3}{6} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $E[X^2] \leq \infty$ et indépendant de t donc par convergence dominée $E\left[\min\left(X^2, |t|\frac{|X|^3}{6}\right)\right] \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc $\varphi_X(t) - \left(1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2]\right) = o(t^2)$ ce qui achève le résultat. $\square$

Théorème. *limite central : Soit $(X_n)_n \subset L^2((\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_{\mathbb{R}^d}))$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement didtribuées. La suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - E[X_j])$$

converge en loi vers la loi gausienne $\mathcal{N}(0, C_{X_1})$ où C_{X_1} est la matrice de covariance des X_j.

Démonstration. L'indépendance et l'équidistribution des variables $(X_j)_j$ donne

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_n}(t) &= E\left[\prod_{j=1} \exp\left(\langle X_j - E[X_j], \frac{it}{\sqrt{n}}\rangle\right)\right] \\ &= E\left[\prod_{j=1} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\langle X_j - E[X_j], it\rangle\right)\right] \\ &= \left(\varphi_{\langle X_1 - E[X_1], t\rangle}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\end{aligned}$$

On applique le lemme précédent à la variable aléatoire réelle centrée $\langle X_1 - E[X_1], t\rangle$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{2n}E\left[\langle X_1 - E[X_1], t\rangle^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)^n$$

D'après la formule de Taylor Young appliqué à log, on a $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}E\left[\langle X_1 - E[X_1], t\rangle^2\right]\right)$. Puisque

$$\begin{aligned}\langle C_{X_1} t, t\rangle &= \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Var}(X_{1j})t_j^2 + \sum_{1\le i<j\le d} 2\mathrm{Cov}(X_{1i}, X_{1j})t_i t_j \\ &= E\left[\left(\sum_{j=1}^{d}(X_{1j} - E[X_{1j}])t_j\right)^2\right] \\ &= E\left[\langle X_1 - E[X_1], t\rangle^2\right]\end{aligned}$$

on obtient $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C_{X_1} t, t\rangle\right)$, ce qui, par le théorème de Lévy, assure que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C_{X_1})$. □

Leçons concernées :
218 Applications des formules de Taylor.
235 Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
250 Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.
251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

Références

[1] Jean-Yves Ouvrard. Probabilités 2. Cassini.