

## Probabilités, fiche d'exercices n°1

### 1 Espaces probabilisés discrets

#### Exercice 1

On cherche à modéliser le lancer de deux dés à six faces, un rouge et un noir. Voici trois modèles :

1. On prend  $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ . L'élément  $(i, j) \in \Omega_1$  représente l'éventualité « le dé rouge montre le nombre  $i$  et le dé noir le nombre  $j$  ».
2. On prend  $\Omega_2 = \{(i, j), i, j \in \{1, \dots, 6\}, i \leq j\}$ . L'élément  $(i, j) \in \Omega_2$  représente l'éventualité « les deux dés montrent les nombres  $i$  et  $j$  ».
3. On prend  $\Omega_3 = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ . Ici,  $i \in \Omega_3$  représente l'éventualité « la somme des deux dés est  $i$  ».

Pour chacun de ces modèles, déterminer la probabilité qu'il convient de mettre sur l'univers choisi pour que le modèle corresponde bien à notre expérience.

Dire, pour chacun des modèles, si  $A, B, D$  sont des événements, et, dans l'affirmative, les écrire comme sous-ensemble de l'univers et donner leur probabilité :

$$\begin{aligned} A &= \text{« la somme des deux dés est 4 »}, \\ B &= \text{« le dé noir a donné 1 »}, \\ C &= \text{« les deux dés ont donné 1 et 3 »}. \end{aligned}$$

#### Exercice 2

Un parking contient douze places alignées. Huit voitures s'y sont garées au hasard, et l'on observe que les quatre places libres se suivent. Est-ce surprenant ?

#### Exercice 3

Soient  $E$  un ensemble et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties de  $E$ . On pose, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$S_m = \bigcup_{n \geq m} A_n, \quad T_m = \bigcap_{n \geq m} A_n.$$

Démontrer les assertions suivantes.

1.  $(T_m)$  (resp.  $(S_m)$ ) est croissante (resp. décroissante).
2.  $\limsup A_n \supset \liminf A_n$ .
3.  $\limsup(A_n^c) = (\liminf A_n)^c$ .
4.  $\liminf(A_n^c) = (\limsup A_n)^c$ .
5.  $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n)$ .
6.  $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mathbb{P}(A_n)$ .

#### Exercice 4

Dans un jeu de loto, un numéro est tiré au hasard parmi les entiers de 0 à 999. Quelle est la probabilité  $p$  de gagner en misant sur un numéro ? la probabilité  $p'$  de gagner en misant sur deux numéros pour le même tirage ?

En jouant à une machine à sous, on gagne avec probabilité  $p$  à chaque fois que l'on tire la manette. Quelle est la probabilité de gagner quelque chose en jouant deux fois ?

#### Exercice 5

Dans un groupe de  $n$  personnes, quelle est la probabilité  $p_n$  pour que les anniversaires de deux au moins d'entre eux tombent le même jour ? À partir de combien de personnes cette probabilité dépasse-t-elle  $1/2$  ?