Probabilités, fiche d'exercices n°3

3 Éléments aléatoires

Exercice 12
On choisit un nombre N au hasard entre 1 et 4, puis un nombre X au hasard entre 1 et N.
Quelle est la loi de X ?

Exercice 13
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, telles que

$$\mathbb{P}[X=0]=\mathbb{P}[Y=0]=\mathbb{P}[X=1]=\mathbb{P}[Y=1]=\frac{1}{2}.$$

Quelle est la loi de (X,Y) ? Quelle est la loi de $X+Y$?

Exercice 14
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et λ'.
Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$.

Exercice 15
On lance deux dés à six faces, un bleu et un rouge. On note X le résultat du dé bleu, et Y celui du dé rouge.
On note $S=X+Y$. Déterminer la loi de S. Pour $x\in\{1,\dots,6\}$ et $s\in\{2,\dots,12\}$, calculer

$$\mathbb{P}[X=x\,|\,S=s]\ .$$

Exercice 16
1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(X_k)_{1\le k\le n}$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, telles que $\mathbb{P}[X_1=1]=1-\mathbb{P}[X_1=0]=p$. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
   (a) Calculer l'espérance de S_n.
   (b) Déterminer la loi de S_n.

2) Paris est interdit à la circulation pour laisser le champ libre aux voitures officielles. Entre l'Étoile et Orly, il y a treize feux tricolores qui fonctionnent de manière indépendante. Chacun est rouge un tiers du temps. Soit X le nombre de feux rouges qu'une escorte de motards ignore sur son passage, de l'Étoile à Orly. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 17
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\mathrm{E}\,X=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}[X>n]\ .$$

Application : Calculer l'espérance d'une loi géométrique.

Exercice 18
Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi, telles que

$$\mathbb{P}[X=0]=\mathbb{P}[Y=0]=\mathbb{P}[X=1]=\mathbb{P}[Y=1]=\frac{1}{2}.$$

Calculer $\mathrm{E}\,X$ et $\mathrm{E}\,Y$.

L'espérance $\mathrm{E}(XY)$ est-elle déterminée par les hypothèses que l'on a formulées ? Dans l'affirmative, donner sa valeur. Dans la négative, quelles sont toutes les valeurs possibles pour $\mathrm{E}(XY)$?

Question 6 ♣ On considère deux événements A et B d'un espace probabilisé discret $(\Omega, \mathbb{P})$. Parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vérifiées sans hypothèse supplémentaire ?

- ☐ $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$
- ☐ $\mathbf{1}_{A|B} = \frac{\mathbf{1}_A}{\mathbf{1}_{A\cap B}}$
- ☐ $\mathbf{1}_{A|B} = \frac{\mathbf{1}_A}{\mathbf{1}_B}$
- ☐ $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$
- ☐ $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$
- ☐ $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A.(1 - \mathbf{1}_B)$

Question 7 ♣ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé. On note $\mathbb{P}_V$ la loi de probabilité du vecteur aléatoire $V = (X, Y)$. Comment la probabilité $p = \mathbb{P}\left[X = 2 \text{ et } Y > 1\right]$ peut-elle s'écrire ?

- ☐ $p = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{2\}\times]1, +\infty[)$
- ☐ $p = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{2\},]1, +\infty[)$
- ☐ $p = \mathbb{P}(X^{-1}(\{2\}) \cap Y^{-1}(]1, +\infty[))$
- ☐ $p = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{2\} \times \mathbb{R}).\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(\mathbb{R}\times]1, +\infty[)$
- ☐ $p = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{2\}).\, \mathbb{P}_{(X,Y)}(]1, +\infty[)$
- ☐ $p = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{2\}\cap]1, +\infty[)$
- ☐ $p = \mathbb{P}(X^{-1}(\{2\})).\, \mathbb{P}(Y^{-1}(]1, +\infty[))$

Question 8 ♣ Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et toutes trois à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Parmi les événements A suivants, pour lesquels existe-t-il un sous-ensemble B de $\mathbb{Z}^2$ tel que $A = (X, Y)^{-1}(B)$?

- ☐ $A = \{Z = 2\}$
- ☐ $A = \{X = 1\}$
- ☐ $A = \{Y = Z\}$
- ☐ $A = \{X = 1 \text{ et } Y \geq 3\}$
- ☐ $A = \Omega$
- ☐ $A = \left\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq 10\right\}$
- ☐ $A = \{X + Z = 10\}$
- ☐ $A = \{X + Y \geq 3\}$

Question 9 On considère l'espace $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. On note X la variable aléatoire définie par $X(i, j) = i$ pour tout $(i, j) \in \Omega$. Combien peut-on construire de variables aléatoires Y sur Ω telles que Y a même loi que X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse

Question 10 Avec les même notations qu'à la question précédente, combien peut-on construire de variables aléatoires Y sur Ω telles que Y est indépendante de X ?

☐ aucune ☐ 1 ☐ 6 ☐ 36 ☐ plus de 600 ☐ autre réponse