**Probabilités, fiche d'exercices n°4**

# 4 Théorie générale des probabilités

**Exercice 19**
On considère un ensemble $\Omega$, et une famille $(A_i)_{i\geq 1}$ de parties de $\Omega$.

**1)** Déterminer la tribu engendrée par $\{A_1, A_2\}$.

**2)** Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir la tribu engendrée par $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ?

**Exercice 20**
Dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue $\lambda$, construire une suite décroissante $\{A_n\}$ de boréliens telle que

$$\lambda\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) \neq \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n)\,.$$

**Exercice 21**
On munit l'ensemble $\Omega = [0,1[$ de sa tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue $\lambda$. On rappelle que tout $x \in [0,1[$ admet un développement unique de la forme

$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n(x)}{3^n}\,,$$

où les coefficients $c_n(x) \in \{0,1,2\}$ ne sont pas tous égaux à 2 à partir d'un certain rang. On considère l'ensemble $C$ défini par

$$C = \{x \in [0,1[,\ c_n(x) \in \{0,2\}\ \forall n \geq 1\}\,.$$

**1)** Montrer que $C$ n'est pas dénombrable. Proposer une manière de construire $C$ géométriquement.

**2)** Calculer $\lambda(C)$.

**Exercice 22**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A$ et $B$ deux événements de $\mathcal{A}$. On définit une variable aléatoire $X$ par

$$X = a\mathbf{1}_A + b\mathbf{1}_B\,,$$

où $a$ et $b$ sont deux réels non nuls. Expliciter $\sigma(X)$ puis calculer la loi de $X$.

**Exercice 23**
Soit $\lambda_2$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

1) Démontrer que $\lambda_2$ est invariante par translation, par symétrie par rapport à chacun des axes $(Ox)$ et $(Oy)$, ainsi que par symétrie par rapport à $O$.
2) Démontrer que si $S$ est un segment de droite, alors $\lambda_2(S) = 0$.
3) Calculer la mesure (pour $\lambda_2$) d'un triangle rectangle ayant deux côtés parallèles aux axes.
4) Calculer la mesure de tout rectangle.
5) Démontrer que $\lambda_2$ est invariante par rotation.
6) Si $A_\alpha$ est l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\alpha$, et $B$ un borélien de $\mathbb{R}^2$ quelconque, déterminer $\lambda_2(A_\alpha(B))$ en fonction de $\lambda_2(B)$.

**Exercice 24**
Soit $\mu$ une mesure positive sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, invariante par translation et telle que $\mu(C_{1,1}) = a \in \mathbb{R}_+^*$, où $C_{x,y}$ désigne le carré $[0,x] \times [0,y]$.

1) Montrer que la mesure (pour $\mu$) d'un segment parallèle à l'un des deux axes est nulle.
2) Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mu(C_{m,n})$.
3) Pour $x, y \in \mathbb{Q}_+$, déterminer $\mu(C_{x,y})$.
4) Déterminer $\mu$.