Un an de khôle !

22 décembre 2014

1 Théorie des ensembles

Exercice *

Soit E un ensemble et A, B des parties de E.

1. Simplifiez chacune des expressions suivantes : $A \cap (A \cap B)$, $A \cup (A \cup B)$, $A \cap (A \cup B)$ et $A \cup (A \cap B)$
2. Trouver un ensemble E et trois parties A, B, C de E tels que : $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$

Exercice *

1. Soient $f : E \to F$ une application et $A, A' \subset E$, $B \subset F$. Complétez les $\cdots$ par le symbole approprié ($\subset$, $\supset$, $=$). Justifiez.

$$\begin{array}{rcl} f\left(f^{-1}(B)\right) & \cdots & B \\ f^{-1}(f(A)) & \cdots & A \\ f(A \cup A') & \cdots & f(A) \cup f(A') \\ f(A \cap A') & \cdots & f(A) \cap f(A') \end{array}$$

2. Dans les cas où il n'y a pas égalité, précisez quelle condition on peut ajouter à f pour obtenir l'égalité (injectivité, surjecticité, bijectivité).

Exercice

Montrez que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Exercice **

Montrez que l'application $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ & (n, m) & \mapsto & 2^n(2m+1) \end{array}$ est bijective.

2 Droite réelle et plan complexe

Exercice *

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note $A^{-1} = \{x \in \mathbb{R}; \exists a \in A, ax = 1\}$.

1. Donnez A^{-1} dans le cas où $A =]-1; 2]$
2. On suppose $\{0\} \neq A \subset \mathbb{R}^+$ et A bornée. Montrez que A^{-1} admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$ et que $\inf\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\sup A}$.

Exercice

1. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrez que $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$
2. Montrez que $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$

Exercice

Déterminez et tracez l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\frac{z-i}{z+1}\right| = 1$

Exercice

Déterminez et tracez l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z+i}\right) \equiv 0\,[\pi]$

Exercice *

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$

Exercice **

Soient A, B, C trois points du plan (non alignés) d'affixes respectives a, b, c et M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 tels que les triangles "extérieurs" ABM_1, BCM_2 et ACM_3 soient équilatérraux. Soient $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ les centres de gravité respectifs des trois triangles d'affixes respectives $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

1. Ecrivez la formule qui lie a, b et ω_1, celle qui lie b, c et ω_2 et celle qui lie a, c et ω_3.
2. Montrez que $\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)(\omega_3 - \omega_1) = -e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)(\omega_2 - \omega_1)$
3. En déduire la nature de $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$

Solution : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème de Napoléon

Exercice *

1. Déterminez l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\text{Arg}\left(\frac{z-2}{z+i}\right) = 0 + \pi\mathbb{Z}$.

Exercice *

1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ majorées. On pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrez que $A + B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. Donnez la borne inférieure des ensembles E suivants, si elle existe :

$$E = \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$E = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{n} - n^2; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - z + 3 = 0$
2. $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$ (Proposez un changement de variable pour vous ramener à une équation du second degré).

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

1. $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$z^8 + 6z^4 + 5 = 0$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$z^{10} + 3z^5 + 4 = 0$

3 Analyse

3.1 Fonctions usuelles

Exercice

1. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:
$$7\text{ch}x + 2\text{sh}x = 9$$
2. Simplifiez l'expression suivante :
$$\text{ch}\left(\text{argsh}x\right)$$

Exercice *

1. Etudiez la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$
2. Comparez 2013^{2014} et 2014^{2013}

Exercice

1. Trouvez une primitive de la fonction $t \mapsto \cos^2(t).\sin^3(t)dt$
2. Simplifiez l'expression $\arccos\left(\sin x\right)$

Exercice *

1. Etudiez et simplifiez l'expression $\arccos\left(2x^2 - 1\right)$
2. Résolvez l'équation $\arccos x = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$

Exercice *

1. Etudiez et simplifiez l'expression $\arctan\left(\frac{1}{\tan x}\right)$
2. Résolvez l'équation : $\arcsin x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$

Exercice *

1. Etudiez et simplifiez l'expression : $\arctan\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$
2. Résolvez l'équation : $\arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice *

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\cos x - \sin x = 1$$

Exercice **

Montrez que pour tout $y \in]-1,1[$, $\text{argth}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Exercice 2

Trouvez une primitive de $t \mapsto \sin(3t)\left(\cos^3 t - 3.\cos t.\sin^2 t\right)$

Exercice

Simplifiez les formules suivantes et rappelez leur domaine de validité :
$$\cos(\arccos x)$$
$$\arcsin\left(\cos x\right)$$
$$\sin\left(\text{arcos}x\right)$$
$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$
$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos x\right)$$

Exercice

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$$\cos x - \sin x = 1$$
$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$$
2. Résoudre l'équation $3\text{ch}x - 2\text{sh}x = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice

1. Simplifiez les formules suivantes et rappelez leur domaine de validité :
$$\begin{gathered} \sin(\arcsin x) \\ \arctan(\tan x) \\ \cos(\arcsin x) \\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) \\ \tan(\arccos x) \end{gathered}$$

Exercice

1. Trouvez une primitive de la fonction $t \mapsto \cos^2(t).\sin^3(t)$
2. Trouvez une primitive de la fonction $t \mapsto \text{sh}^4(t).\text{ch}^5(t)$

Exercice **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}$

3.2 Suites numériques

Exercice *

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = 1$. Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$
2. Montrez qu'une suite périodique qui converge est constante.
3. Que peut on dire d'une suite réelle croissante qui admet : a) une suite extraite convergente ? b) une suite extraite majorée ?

Exercice

Etudiez la convergence des suites $(u_n)_n$ suivantes définies par leur terme général :

1. $u_n = \frac{4n^4+\sqrt{n}}{3n^3-1}$
2. $u_n = \frac{3n^2+n+\frac{2}{n}}{2n^2+1}$ pour $n \geq 1$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$ pour $n \geq 1$
4. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$
5. $u_n = (-1)^n\left(2(-1)^n + 3\right)$

Exercice

Etudiez la convergence des suites $(u_n)_n$ suivantes définies parleur terme général :

1. $u_n = \frac{2n^4+n}{n^3-1}$
2. $u_n = \frac{6n^3+2n+7}{2n^3+1}$ pour $n \geq 1$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+5}}{3n}$ pour $n \geq 1$
4. $u_n = (-1)^n\left(2(-1)^n + 3\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2+2n+2} - n$

Exercice

Etudiez la convergence des suites $(u_n)_n$ suivantes définies par leur terme général :

1. $u_n = \frac{n+4}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^3+n+1} - n\sqrt{n}$
3. $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$ (Rappel : $n! = 1.2.3.\ldots.n$ pour $n \geq 1$)
4. $u_n = \frac{3n^2+2n+7}{9n^2-4n+5}$
5. $u_n = sin\,(n)$

Exercice

Etudiez la convergence des suites $(u_n)_n$ suivantes données par le terme général :

1. $u_n = \frac{3n^2+\frac{1}{n}}{2n}$ pour tout $n \geq 1$
2. $u_n = \frac{4n^4+5n^2+8n+3+\sqrt{n}}{7n^4+8n^3+2n+\sqrt{3}}$ pour tout n
3. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{4n+1}$ pour tout n

Exercice 2

Calculez le terme général des suites $(u_n)_n$ suivantes définies par récurrence :

1. $u_{n+1} = 4u_n$ pour tout $n \geq 0$ et $u_0 = 2$
2. $u_{n+2} + 2u_{n+1} + 3u_n = 0$ pour tout $n \geq 0$ avec $u_0 = 1$ $u_1 = -1$

Exercice

Limite inférieure : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Démontrez qu'il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\inf\limits_{k\geq n} u_k$. Remarque : on appelle ce nombre $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 2

Etudiez la convergence des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n^3+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sqrt{n^2+1} - n$

Exercice 2

Etudiez la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n\pi} 2\left(\frac{k}{n}\right)\cos\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(e^{\frac{k}{n}}-1\right)}{k}$

Exercice 2

Etudiez la convergence de la suite suivante

$u_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

Exercice 2

Etudiez la convergence de la suite suivante :

$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$

Exercice 2

Etudiez la convergence de la suite suivante :

$u_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k^2+n^2}$

3.3 Formules de Taylor, développements limités, calculs de limites

Exercice

1. Etudiez la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
2. Déduisez-en la limite de la suite $(v_n)_n$ défnie par $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice

Etudiez la convergence des suites suivantes données par leur terme principal :

1. $u_n = \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$
2. $u_n = n.\sin\frac{1}{n^2}$
3. $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2

Calculez les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n$

Exercice

Trouvez les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+x+1}{8x^4-2}$
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3-2x+1}{2x^3+3x}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$
4. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+x+6}{x-2}$
5. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x^2-2}{x^2+x+3}\right)$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice

Donnez un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$
2. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x \sin 5x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|}$

Exercice

Donnez les développements limités suivants

1. $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en 0 à l'ordre 3
2. $\exp(\sin x)$ en 0 à l'ordre 4
3. $\ln\left(4-8x+x^2\right)$ en 0 à l'ordre 4

Exercice

Calculez les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^2+n+1}-n$

Exercice

Calculez les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-e^x}{\tan x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 6x-\sin^2 4x}{\tan^2 x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x^2}{x^6+3x^2}$

Exercice

Etudiez la convergence des suites suivantes données par leur terme principal :

1. $u_n = n^2 \cos\frac{1}{n^4} \sin\frac{1}{n^3}$
2. $u_n = \sqrt{n^4+n^2+1}-n^2$
3. $u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

Exercice

Etudiez la convergence des suites suivantes données par leur terme principal :

1. $u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n$
3. $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 6x-\cos 8x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{x^2}$

Exercice

Etudiez la convergence des suites $(u_n)_n$ suivantes définies par leur terme général :

1. $u_n = \frac{n+4}{n+1}$
2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$ (Rappel : $n! = 1.2.3.\ldots.n$ pour $n \geq 1$)
3. $u_n = \frac{3n^2+2n+7}{9n^2-4n+5}$
4. $u_n = (-1)^n \left(2(-1)^n + 1\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2+n+2} - n$

Exercice 2

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1-\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - n$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+n+2+\frac{1}{n}} - 2n$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1-\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+2} - n$
3. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 6x-\cos 8x}{x^2}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3+2n+1} - n$

Exercice

Lorsque les limites suivantes existent, déterminez-les :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^3+1}}{\sqrt{x^3+2}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$

Exercice

Lorsque les limites suivantes existent, déterminez-les :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^5+x+2}}{\sqrt{x^5+3x^2+2}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+2} - x$

Exercice

Lorsque les limites suivantes existent, déterminez-les :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4+7x^3+2x-1}{4x^4-x+3}$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

Exercice

Calculez les développements limités des fonctions suivantes en 0 :

1. $\frac{\ln(1+x)}{\cos x}$ à l'ordre 5
2. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'orde 4
3. $\ln(\sin x)$ à l'ordre 6

Exercice

Donnez les développements limités des fonctions suivantes en x_0 à l'ordre n :

1. $e^{\sin x}$ en $x_0 = 0$ à $n = 3$
2. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ en $x_0 = 0$ pour $n = 4$
3. $e^{\frac{x^2}{x+1}}$ en $x_0 = 0$ pour $n = 3$

Exercice

Soit $g : x \mapsto \frac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \frac{1}{x^2}$

1. Donnez les domaine de définition de g.
2. Montrez qu'elle se prolonge par continuité en une fonction dérivable
3. Déterminez la tangente en 0 du graphe de cette fonction et la position de ce graphe par à celle-ci.

Exercice

Calculez les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+2} - x$

Exercice

Calculez les développements limités des fonctions suivantes en 0 :

1. $\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$ à l'ordre 5
2. $\frac{e^x-1-x}{1+\sin x}$ à l'orde 4
3. $e^x \ln(x+1)$ à l'ordre 6

Exercice

Dîtes si les fonctions suivantes sont continues, dérivables ou de classe C^1 :

1. $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice

Pour les fonctions suivantes, donnez une asymptote en $+\infty$ et précisez la position de f par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$
2. $f(x) = x \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{3+x}}\right)$
3. $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice

Dîtes si les fonctions suivantes sont continues, dérivables ou de classe C^1 :

1. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos 6x - \cos 8x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 14 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x \sin 5x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}{\ln x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

Exercice

Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x\sqrt{1-x}\sin x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)\ln(\cos x)}{x^2 \ln x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

3.4 Fonctions continues, fonctions dérivables

Exercice *

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ une fonction continue. Montrez que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique avec $T > 0$. Montrez que f est constante.

Exercice

Théorème de Rolle : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(kx) = k.f(x)$.
3. Montrez que pour tout $v \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(vx) = v.f(x)$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. On pourra (et on devra) utiliser le résultat suivant sans le démontrer : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Exercice

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (càd f dérivable, f' dérivable, f" dérivable etc...). Démontrez que fg est n fois dérivable et proposez une formule pour exprimer $(fg)^{(n)}$ en fonction des dérivées k-ièmes de f et de g pour $0 \leq k \leq n$.

Exercice **

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrez que f est linéaire si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a.x$

3.5 Intégration

Exercice

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(17x^9 + 9x^8 - 2x^7 + 7x^6 - 14x^5 + 5x^4 - 41x^3 + 3x^2 - 9x + 1\right) dx$ (réfléchir un tout petit peu avant de vous lancer dans les calculs devrait vous éviter de perdre trop de temps).
2. $\displaystyle\int_{4}^{9} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$ (poser le changement de variable $u = \sqrt{x}$)
3. $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{4x+1}{2x^2+x} dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2} dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+5x+6} dx$ (vous pouvez d'abord résoudre $x^2 + 5x + 6 = 0$)

Exercice

Trouvez une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \frac{-\cos t}{2-\cos^2 t}$
2. $t \mapsto \mathrm{ch}^7 t \mathrm{sh}^4 t$

Exercice

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\left(2x^{17}+9x^{15}-3x^{13}-4x^{11}+8x^{9}-19x^{7}+x^{5}+x^{3}+3x^{2}+9x\right)dx$ (réfléchir un tout petit peu avant de vous lancer dans les calculs devrait vous éviter de perdre trop de temps).
2. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}}2x.\sin x^{2}dx$ en posant le changement de variable $u=x^2$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}2xsinxdx$
4. $\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{x-2}{x^2-4x+4}dx$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2+2x-8}dx$ (vous pouvez d'abord résoudre $x^2+2x-8=0$)

Exercice

Trouvez une primitive des fonctions suivantes :

1. $t\mapsto \cos^4 t\sin^3 t$
2. $t\mapsto \mathrm{ch}^2 t\mathrm{sh}^3 t$
3. $t\mapsto \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}$

Exercice

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{0}^{1}2\left(5x^4-8x^3+3x^2-4x+2\right)\left(x^5-2x^4+x^3-2x^2+2x\right)dx$ (réfléchir un tout petit peu avant de vous lancer dans les calculs devrait vous éviter de perdre trop de temps).
2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi^3}3x^2\cos x^3dx$ en posant le changement de variables $u=x^3$.
3. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}2x\cos xdx$
4. $\displaystyle\int_{2}^{5}-\frac{2x-2}{(x^2-2x+1)^2}dx$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+3x+2}dx$ (vous pouvez d'abord résoudre $x^2+3x+2=0$)

Exerice

1. Trouvez une primitive de la fonction $t\mapsto \mathrm{ch}^5 t.\mathrm{sh}^8 t$
2. Trouvez une primitive de la fonction $t\mapsto \cos^5 t\sin^2 t$
3. Trouvez une primitive de la fonction $t\mapsto \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$

Exercice

Soit $x>0$. Montrez que $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt=\frac{n!n^x}{x(1+x)\ldots(n+x)}$ pour tout $n\geq 1$.

3.6 Equations différentielles

Exercice

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y' + 2y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} xy' - 2y = x^5 \\ y(-1) = -\frac{4}{3} \end{cases}$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$
3. $\begin{cases} (1-x^2)y' - 2xy = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ pour $x \in]-1, 1[$

Exercice

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y' + y = 6 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' + \tan(x).y = \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
3. $\begin{cases} xy' - y = x \\ y(-e) = 0 \end{cases}$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$

Exercice

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y' + 3y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} (x-3)y' - 3y = x + 5 \\ y(4) = 0 \end{cases}$ pour $x > 3$
3. $\begin{cases} xy' - y = x\ln x \\ y(-e) = 1 \end{cases}$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$

Exercice (cf. Analyse, Jacques Douchet, Presse polytechnique et universitaires romandes)

Résolvez les équations différentielles suivantes :

1. $xy' - y = x\ln x$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$
2. $y" - 4y = 4e^{-2x}$

Exercice (cf. Analyse, Jacques Douchet, Presse polytechnique et universitaires romandes)

Résolvez les équations différentielles suivantes :

1. $xy' - y = x$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$
2. $y" - 6y' + 5y = e^{5x}$
3. $(x\cos x).y' + (\cos x + x\sin x)\, y = 1$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

Exercice (cf. Analyse, Jacques Douchet, Presse polytechnique et universitaires romandes)

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y" - 6y' + 5y = e^{5x} + \cos x$
2. $y" + y = \sin x$

Exercice (cf. Analyse, Jacques Douchet, Presse polytechnique et universitaires romandes)

Résolvez les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2\,(\tan x)\,y = \sin x$ pour $x \in]\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}[$
2. $y' + y = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice (cf. Analyse, Jacques Douchet, Presse polytechnique et universitaires romandes)

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $y" - 4y' + 5y = x^2 + x^3 + e^{2x}\sin x$
2. $y" - 8y' + 16y = e^{4x} + \cos x$

Exercice

Résolvez les équations différentielles suivantes :

1. $x(1-x)y' + y = x$ pour $x \in]1; +\infty[$
2. $(x-3)y' - 3t = x + 5$ pour $x \in]-\infty; 3[$

Exercice (cf. Analyse, Jacques Douchet, Presse polytechnique et universitaires romandes)

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équation différentielles suivantes :

1. $y" - 4y = 4e^{-2x}$
2. $y" + 2y' + 4y = xe^x + \cos x$
3. $y" - 8y' + 16y = e^{4x}$

Exercice

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y" + 2y' + 4y = xe^x + \cos x$
2. $y" - 4y' + 5y = x^2$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
$y" - 4y = 4e^{-2x}$

Exercice 1

Résolvez dans $]-1; 1[$ l'équation différentielle suivante : $\sqrt{1-x^2}y' + y = e^{\arcsin x}$

Exercice 1

1. Résolvez dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante : $(1+x^2)y' + y = e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$
2. Donnez l'ensemble de définition simplifiez l'expression de la fonction$x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{\tan x}\right)$

3.7 Séries numériques

Exercice

Montrez que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ défnie par $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ diverge.

Exercice

Etudiez la convergence des séries suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\,(n-1)}$
2. $\sum_{n\geq 3} \frac{2}{(n-1)(n-2)}$
3. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$

Exercice

Etudiez la convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n^3+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}$
3. $\sum_{n\geq 3} \frac{2}{(n-1)(n-2)}$

Exercice

Soit $(a_n)_n \in \{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ une suite qui ne prend que des valeurs dans $\{0,\ldots,9\}$.

1. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n.10^{-n}$ converge.
2. Montrez que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 9.10^{-n} = 1$
3. On suppose à présent qu'il existe $N \geq 1$ tel que $a_{N-1} \neq 9$ $a_n = 9$ pour tout $n \geq N$. Calculez $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n.10^{-n}$.

Exercice

Etudiez la convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(n)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$

Exercice ***

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

1. Montrez que pour tout entier $p \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^p < +\infty$
2. Montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n} = 0$
3. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_1+2a_1+\ldots+na_n}{n\,(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
4. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n+1} < +\infty$

Exercice **

Soit $(a_n)_n$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ pour tout $n \geq 1$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n$
2. Calculez la somme de la série $\sum \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}}$
3. Calculez la somme de la série $\sum \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}$

Exercice 2

Etudiez la convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 4} \frac{1}{n^2+n-6}$

Exercice

Etudiez la convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^4+n^3+n}{n^5+6n^2+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \tfrac{1}{n^2+2n-3}$

Exercice

Justifiez que les séries suivantes convergent en utilisant des résultats de votre cours :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Exercice Séries convergentes non absolument convergentes ***

1. Donnez un exemple de série convergente qui ne soit pas absolument convergente.
2. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ une série convergente non absolument convergente. Montrez que $\{n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0\}$ est un ensemble comportant un nombre infini d'élements.
3. Théorème de Riemann : Montrez qu'il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} = 0$.

4 Algèbre linéaire

4.1 Résolution de systèmes linéaires

Exercice

Résoudre les systèmes linéaires suivants

1. $\begin{cases} x+2y+2z &= 2 \\ 3x-3y+z &= 5 \\ 4x-z &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y &= 1 \\ z-t &= 2 \\ x+t &= 1 \\ z+2y &= -1 \end{cases}$

Exercice

1. $\begin{cases} 2x-y+3z &= 1 \\ y+z &= 2 \\ x-4y-z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+3y-z &= 7 \\ 2x+3y-z &= 2 \\ 4x+z &= 1 \end{cases}$

Exercice

1. $\begin{cases} 2x-y+3z &= 1 \\ y+z &= 2 \\ x-4y-z &= 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+3y-z &= 7 \\ 2x+3y-z &= 2 \\ 4x+z &= 1 \end{cases}$

Exercice

1. $\begin{cases} 3x+y-2z &= 1 \\ 5y+8z &= 0 \\ x+y-z &= 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ x-z &= 3 \\ 3y+z &= -2 \end{cases}$

Exercice

Résolvez les système suivants :

1. $\begin{cases} x+y-2z &= -4 \\ 3x-y+z &= 6 \\ 5x+y-z &= 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y+z &= 8 \\ 2x+y-3z &= -12 \\ -x-y+2z &= 9 \end{cases}$

Exercice

Résolvez les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 4x-3y+z & =3 \\ 5x-y-2z & =0 \\ -3x+3y-z & =-2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 8x+2y-z & =-1 \\ 3x-y+2z & =-4 \\ 15x+z & =-3 \end{cases}$

Exercice

Résolvez les systèmes suivants

1. $\begin{cases} x-2y-2z & =1 \\ 3x-8y-+z & =8 \\ -x+y+z & =-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y+z & =-1 \\ -3x+y-z & =2 \\ 5x+3y-4z & =-11 \end{cases}$

4.2 Matrices

Exercice

1. Calculez le rang de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2. Montrez que la matrice suivante est inversible et déterminez son inverse : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Résolvez le sytème matriciel suivant : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice

1. Calculez le rang de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 6 & 12 \\ 4 & -4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

2. Montrez que la matrice suivante est inversible et déterminez son inverse : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. Résolvez le sytème matriciel suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice

1. Calculez le rang de la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Montrez que la matrice suivante est inversible et déterminez son inverse : $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Résolvez le sytème matriciel suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice

Dîtes si les matrices suivantes sont inversibles et donnez leur inverse le cas échéant.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit A une matrice triangulaire supérieure. On suppose que A est inversible. Que pouvez dire sur A^{-1} ?

Exercice *

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On note A^{t} la matrice transposée de A.

1. Donnez la matrice $(AB)^{\mathrm{t}}$ en fonction de A^{t} et B^{t}.
2. Montrez que la matrice $A^{\mathrm{t}}A$ est symétrique.
3. Montrez que les coefficients diagonaux de $A^{\mathrm{t}}A$ sont positifs ou nuls.

Exercice

Calculez les puisssances successives des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure qui n'a que des zéros sur sa diagonale. Montrez que $A^n = 0$.

Exercice

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez les puissances successives de A.
2. Calculez $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^5$ en vous servant de la question précédente.

Exercice

1. Donnez le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. Déterminez si la matrice suivante est inversible. Si, oui donnez son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

1. Donnez le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. Déterminez si la matrice suivante est inversible. Si, oui donnez son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice

Calculez le déterminant des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice

Calculez le déterminant des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice

Calculez les déterminants suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1. $A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$
2. $B_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1. $A = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 0 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & m & 2m \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} m & m^2 & 2m \\ -1 & 4 & -2 \\ 2m & m & 4m \end{pmatrix}$

Exercice

Pour quelles valeurs de m les matrices suivantes sont elles inversibles ?

1. $A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} m & m & m \\ m & 2m & 2m \\ m & 2m & 3m \end{pmatrix}$

Exercice

Calculez les déterminants des matrices $n \times n$ suivantes en fonction de n.

1. $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$
2. $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4.3 Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice

On pose $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dîtes si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de A et justifiez votre réponse :

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions paires.
3. L'ensemble des fonctions croissantes.
4. L'ensemble des fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$
5. L'ensemble des fonctions f tells que $f(1) = 0$

Exercice

On pose $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dîtes si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de A et justifiez votre réponse :

1. L'ensemble des fonctions impaires.
2. L'ensemble des fonctions positives.
3. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques.
4. L'ensemble des fonctions bornées.
5. L'ensemble des fonctions f tells que $f(0) = 1$.

Exercice

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \end{array}$

1. Montrez que f est linéaire et donnez la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrez que f est un projecteur.
3. Démontrez que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercice

Soient F, G deux sous espaces vectoriels de E. Dîtes si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifiez :

1. $F \cap G \subset F + G$
2. $F \cup G \subset F + G$
3. $F \subset F + G$
4. $F + F = F$
5. $F + G \subset F \cup G$

Exercice

Soit $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles. Déterminez si les ensembles suivants sont des sev de A et justifiez :

1. les suites qui tendent vers 1.
2. les suites qui tendent vers 0.
3. les suites bornées.
4. les suites positives.
5. les suites géométriques.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. On définit $F = \{P \in E,\ P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}\left(X^2, X\left(X+1\right), \left(X+1\right)^2\right)$

1. Montrez que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right) \end{array}$

1. Montrez que f est une application linéaire.
2. Montrez que f est un projecteur.
3. Déterminez le noyau et l'image de f.

Exercice

Soit f l'ensomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminez $\ker\left(f - 6\mathrm{id}\right)$
2. Montrez que $\operatorname{Im}\left(f - 6\mathrm{id}\right) = \ker\left(f^2 + \mathrm{id}\right)$
3. Choisissez un vecteur x dans $\ker\left(f - 6\mathrm{id}\right)$ est un y dans $\ker\left(f^2 + \mathrm{id}\right)$. Montrez que $(x, y, f(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (-3x + y + -4z + t, -4x + 2y - 4z + 2t, 2x - y + 3z - t, -2x - 2z) \end{array}$

1. Donnez la matrice de f dans la base usuelle de $\mathbb{R}^4$
2. Soit F la famille $\left(\left(1,1,-1,0\right), \left(1,0,0,2\right), \left(-1,0,1,0\right), \left(0,-1,0,1\right)\right)$. Montrez que F est une base est déterminez la matrice représentative de f dans F.
3. Déterminez Ker f.

4.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Montrez que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donnez les coordonées des vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.
3. On pose à présent $w' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que (u, v, w') ne forme pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$.

1. Démontrez que la famille $\left(X^4, X\left(X-1\right)\left(X+1\right), X^2-1, 3X, 2\right)$ forme une base de E.
2. Donnez un exemple de famille libre de E qui ne soit pas génératrice.
3. Donnez un exemple de famille génératrice de E qui ne soit pas libre.
4. Donnez un exemple de base de E qui ait deux polynômes de même degré.

Exercice

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Dîtes si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille (x, y, z) est libre.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.
3. Si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ engendre E alors $\dim E = p$.

Exercice *

Soit $E = M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. Donnez la dimension de E ainsi qu'une base de E.
2. On pose S l'ensemble des matrices symétriques et A l'ensemble des matrices antisymétriques. Donnez la dimension de A et S.
3. Montrez que $A \oplus S = E$ en utilisant un argument de dimension.

Exercice

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Dîtes si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soient $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ deux familles libres. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une famille génératrice de E. Alors $m \geq n$.
3. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux bases de E. Alors, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)$ est une base de E.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $U = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$ et $V = \mathrm{Vect}\,(1, X)$

1. Montrez que U est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrez que $\left(X\left(X-1\right), X^2\left(X-1\right)\right)$ forme une base U.
3. Montrez que $U \oplus V = E$ par un argument de dimension.

Exercice

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Dîtes si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soient $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ deux familles libres. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.
2. Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une famille génératrice de E. Alors $m \geq n$.
3. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux bases de E. Alors, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)$ est une base de E.

Exercice

On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension$n$. Dîtes si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifiez :

1. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux bases de E. Alors, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)$ est une base de E.
2. Si $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ engendre E, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ aussi.
3. Si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ engendre E alors $\dim E = p$.

Exercice

Soient $E = \text{Vect}\left(X, X(X-1), X^2\right)$, $F = \{P(X) \in \mathbb{R}[X], P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ $G = \{P(X) \in \mathbb{R}[X], P(0) = 2\}$ $H = \{P(X) \in \mathbb{R}[X], P([1,2]) = \{0\}\}$.

1. Précisez pour chacun de ces ensembles si il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Si oui, donnez la dimension ainsi qu'une base de ce sous-espace vectoriel.
3. Précisez la dimension de la somme des trois sous-espaces vectoriels ainsi qu'une base.

Exercice

Dire les applications suivantes sont des isomorphismes et si oui, donnez l'application réciproque :

1. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ & P & \mapsto & P.Q \end{array}$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé
2. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (|P(1)|, \ldots, |P(n+1)|) \end{array}$
3. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & \left(\frac{P^{(n)}(0)}{n!}, \frac{P(0)}{0!} \ldots, \frac{P^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right) \end{array}$

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. On définit $F = \{P \in E,\ P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}\left(X^2, X(X+1), (X+1)^2\right)$, $H = \{P \in \mathbb{R}[X], P(k) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

1. H est il un sous esâce vectoriel de E. Si oui, quelle est sa dimension ?
2. Montrez que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
3. A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice

Dire les applications suivantes sont des isomorphismes et si oui, donnez l'application réciproque :

1. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(-1), P(-2), \ldots, P(-n-1)) \end{array}$
2. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & \left(P'(0), P^{(2)}(0), \ldots, P^{(n+1)}(0)\right) \end{array}$
3. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & \left(\frac{P'(0)}{1!}, \ldots, \frac{P^{(n)}(0)}{n!}, \frac{P(0)}{0!}\right) \end{array}$

Exercice

Dire les applications suivantes sont des isomorphismes et si oui, donnez l'application réciproque :

1. $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & (P(1), P(2), \ldots, P(n+1)) \end{array}$
2. $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & \left(\frac{P(0)}{0!}, \frac{P'(0)}{1!}, \ldots, \frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right) \end{array}$
3. $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & x & \mapsto & \left(\frac{(X-x_2)\ldots(X-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \cdots + \frac{(X-x_1)\ldots(X-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\right) \cdot X \end{array}$

Exercice

Soient $E = \text{Vect}\,(X, 2, X\,(X-1)\,(X+1))$, $F = \{P(X) \in \mathbb{R}[X], P(0).P(1) = 0\}$ $G = \{P(X) \in \mathbb{R}[X], P(0) = P(1) = 0\}$ $H = \{P(X) \in \mathbb{R}[X], P\,([-1, 1]) = \{0\}\}$.

1. Précisez pour chacun de ces ensembles si il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. (Indice : seulement trois sont des sous espaces vectoriels).
2. Si oui, donnez la dimension ainsi qu'une base de ce sous-espace vectoriel.
3. Précisez la dimension de la somme des trois sous-espaces vectoriels ainsi qu'une base.

Exercice

Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$

1. Donnez la matrice représentative de f dans la base usuelle de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donnez le rang et l'image de f.
3. Donnez un base de $\text{Ker} f, \ldots, \text{Ker} f^n$.

Exercice

Soit $E = C^0(\mathbb{R})$ et $F = \text{Vect}\,(\exp, \cos, \sin)$

1. Soit $\begin{array}{cccc} T: & F & \to & F \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$. Jusitifiez que f est un isomorphisme.
2. Déterminez $\text{Ker}\,(T - \text{Id})$ ainsi que $\text{Ker}\,(T^4 - \text{Id})$
3. Justifiez pourquoi on appelle T une rotation.

Exercice

Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \mapsto & \left(\frac{P'(0)}{1!}, \ldots, \frac{P^{(n)}}{n!}, \frac{P(0)}{0!}\right) \end{array}$

1. Démontrez que f est linéaire et bijective
2. Donnez la matrice représentative de f dans la base usuelle de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On pose $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}_n\,[X] & \to & \mathbb{R}_n\,[X] \\ & P & \mapsto & \frac{P'(0)}{1!} + \frac{P"(0)}{2!}X + \ldots \frac{P^{(n)}}{n!}X^{n-1} + \frac{P(0)}{0!}X^n \end{array}$. Déterminez g^k pour tout $2 \leq k \leq n$.

Exercice

Soit $E = C^0(\mathbb{R})$ et $F = \text{Vect}\,(x \mapsto e^{-x}, \cos, \sin)$

1. Soit $\begin{array}{cccc} f: & F & \mapsto & F \\ & f & \mapsto & f" \end{array}$. Justifiez que f est un isomorphisme.
2. Jusitifez que f^2 est un projecteur linéaire.
3. Déterminez $\text{Ker}\,(f + \text{Id})$ et $\text{Ker}\,(f^2 + \text{Id})$

4.5 Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice *

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et A et B deux parties non vides de E. On appelle $A^{\circ}=\{c\in E \mid \langle c,x\rangle\leq 1 \text{ pour tout } x\in A\}$ la partie polaire de A. Pour tout $\lambda\geq 0$ et $x\in E$, on note $B(x,\lambda):=\left\{y\in E \mid \langle x-y,x-y\rangle<\lambda^2\right\}$ et $\overline{B(x,\lambda)}:=\left\{y\in E \mid \langle x-y,x-y\rangle\leq\lambda^2\right\}$.

1. Montrez que $A\subset B\Rightarrow B^{\circ}\subset A^{\circ}$.
2. Soit $\lambda>0$. Montrez que $\overline{B(0,\lambda)}^{\circ}=\overline{B\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)}$
3. Remplacez les ... par le symbole $\subset,\supset$ ou $=$:

$$A^{\perp}\ldots A^{\circ} \quad \text{et} \quad \left(A^{\circ}\right)^{\circ}\ldots A$$

Exercice

On pose $E=\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Représentez sur un dessin les espaces F,$F^{\perp}$ et F° pour F donné par :

1. $F=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \langle x,x\rangle\leq 4\right\}$
2. $F=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \langle x,x\rangle=4\right\}$
3. $F=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \langle x,y\rangle=0\right\}$ avec $y=(1,2)$

Exercice

On note $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt+\int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$

1. Montrez que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On note $F=\text{Vect}\left(X^3\right)$. Déterminez l'orthogonal de F dans $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.
3. Utilisez le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée.

Exercice

On pose $E=\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Représentez sur un dessin les espaces F et $F^{\perp}$ pour F donné par

1. $F=\{x\in E \mid \langle x,y\rangle=0\}$ avec $y=(1,1)$
2. $F=\{x\in E \mid 4\leq\langle x,x\rangle<25\}$
3. $F=\{x\in E \mid \langle x,y\rangle\leq 1\}$ avec $y=(1,1)$
4. $F=\{x\in E \mid -1\leq\langle x,y\rangle\leq 1\}$ avec $y=(1,0)$

Exercice

On pose $E=\mathbb{R}^4$ et $\langle x,y\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i.x_iy_i$

1. Montrez que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F=\left\{x\in\mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$. Déterminez l'orthogonal de F dans $(E;\langle\cdot,\cdot\rangle)$.
3. Utilisez le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour construire une famille orthonormée.

Exercice

Dîtes si les applications $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définissent des produits scalaires sur les espaces vectoriels E donnés et justifiez.

1. $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P,Q\rangle=PQ$
2. $E=C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $\langle f,g\rangle=\displaystyle\int_a^b f'(t)g'(t)dt$
3. $E=C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $\langle f,g\rangle=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt+\int_a^b f'(t)g'(t)dt$

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}_1[X]$. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot,\cdot \rangle : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \langle P,Q \rangle = \int_0^1 x^2 P(x)Q(x)dx \end{array}$$

1. Montrez que $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Construisez un base orthonormale de F.
3. Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 \left(x^2 + x + 1 - ax - b\right)^2 dx$ soit minimale.

Exercice *

Soient $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale de vecteurs de E. On considère une application f de E dans E vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrez que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
2. Montrez que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est orthonormale.
3. En déduire que f est linéaire.

Exercice

Dîtes si les applications $\langle \cdot,\cdot \rangle$ définissent des produits scalaires sur les espaces vectoriels E donnés et justifiez.

1. $E = \{\mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$ et $\langle P,Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q'(t)dt$
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\langle P,Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(P'(t)Q'(t) + P(t)Q(t)\right) dt$
3. $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle x,y \rangle = x_1y_2 + 2x_2y_1$

Exercice

Dîtes si les applications $\langle \cdot,\cdot \rangle$ définissent des produits scalaires sur les espaces vectoriels E donnés et justifiez.

1. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P,Q \rangle = PQ$
2. $E = C^1([a,b], \mathbb{R})$ et $\langle f,g \rangle = \displaystyle\int_a^b f'(t)g'(t)dt$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\langle P,Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit F le plan d'équation $x + y + z = 0$.

1. Déterminez une base orthornormale de F, déterminez $F^\perp$ ainsi qu'une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Déterminez la projeté sur F du vecteur $a = (1, 2, 5)$.
3. Soit p le projection orthogonale sur F. Déterminez la matrice de p dans la base canonique.

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et F le sous-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 1.

1. Montrez que l'application $\langle P,Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Construisez une base orthonormale de F.
3. Déterminez le projeté orthogonal de $3X^2 - 5X$ sur F.

Exercice **

Soient $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$. On admet que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire.

1. Soit et $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto x^3$. Construisez une base orthonormée de Vect (u, v).
2. Soient $V := \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W := \{f \in E \mid f" = f\}$. Montrez que V et W sont orthogonaux.
3. Soit $E_{\alpha\beta} := \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminez $\displaystyle\inf_{f\in E_{\alpha\beta}} \int_0^1 \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) dt$

5 Anneau des polynômes

Exercice

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que P est un polynôme paire si $P(-X) = P(X)$

1. Montrez qu'un polynôme est paire si et seulement si ses coefficients d'ordre impaires sont tous nuls.
2. Dîtes si les polynômes suivants sont paires et justifiez-le le plus rapidement possible : $P_1 = 11X^8 - 3X^6 + 5X^4 - 2X^3 - 7X^2 + 3$; $P_2 = (X-2)(X-1)(X+2)$; $P_3 = (X-4)(X-7)(X+5)(X+7)(X+4)(X-5)$; $P_4 = X(X-1)(X+1)$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ un polynôme paire démontrez que si $a_{2n}a_0 \leq 0$ alors P admet une racine réelle.
4. Que pouvez vous dire de la réciproque ?

Exercice

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que P est un polynôme paire si $P(-X) = P(X)$ et qu'il est impaire si $P(-X) = -P(X)$.

1. Montrez qu'un polynôme est impaire si et seulement si ses coefficients d'ordre paires sont tous nuls.
2. Montrez qu'un polynôme P est paire si et seulement si son polynôme dérivé P' est impaire.
3. Peut on appliquer le même critère pour les polynômes impaires : P est impaire si et seulement si P' est paire ?
4. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ un polynôme paire et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n} \in \mathbb{C}$ ses racines complexes. Démontrez que pour tout $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ il existe $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ tel que $\lambda_k = \overline{\lambda_j}$.

Exercice

Effectuez la division euclidienne dans $\mathbb{C}$ des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ suivants par les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ suivants :

1. $P = X^3 - 1$ $Q = X + 2$
2. $P = 3X^5 + 4X^2 + 1$ $Q = X^2 + 2X + 3$
3. $P = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ $Q + X^3 + X + 2$

Exercice

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que P est un polynôme paire si $P(-X) = P(X)$.
Soit n un entier. Considérons le polynôme $P_n(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$

1. Quel est le degré de P_n ?
2. Montrez que le polynôme P_n est impaire lorsque n est pair et pair lorsque n est impair.
3. Déterminez les racines complexes de P_n. Parmi ces racines, combien sont réelles ?

Exercice **

Trouvez tous les fonctions polynômes de degré ≤ 3 telles que $P(0) = 1$ $P(1) = 2$ $P(2) = -1$ $P(3) = -2$.

Exercice

Effectuez la division euclidienne des polynômes P suivants par les polynômes Q suivants :

1. $P(X) = X^3 + 4X^2 - X + 1$, $Q(X) = X + 5$
2. $P(X) = X^2 + 5X + 8$, $Q(X) = X^3 - 3X + 2$
3. $P(X) = X^n - 1$, $Q(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Effectuez la divion euclidienne des polynômes P suivants par les polynômes Q suivants :

1. $P(X) = X^8 - 1$, $Q(X) = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
2. $P(X) = X^5$, $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
3. $P(X) = X^{2n} - 1$, $Q(X) = (X^n + 1)\left(X^{n-1} + \ldots + X + 1\right)$

Exercice

Effectuez la division euclidienne des polynômes P suivants par les polynômes Q suivants :

1. $P(X) = X^4 + 2X^2 - X + 2$, $Q(X) = X^3 - X + 1$
2. $P(X) = X^7 + 5X^4 - 3X^3 + 2X - 9$, $Q(X) = 5X^8 + 7X^6 - 9X^5 + 2X^4 - 8$
3. $P(X) = X^{2n} - 1$, $Q(X) = X^3 - X$

6 Combinatoire, Probabilités

6.1 Dénombrements, calcules de probabilités

Exercice

On se place dans une classe de 48 élèves.

1. Le porfesseur souhaite faire deux groupes de TD comprenant chacun 24 élèves. Combien de possiblités a-t-il de composer de tels groupes ?
2. A la suite d'un DS, le professeur divise la classe en trois groupes : ceux qui ont eu une note strictement inférieure à 10, ceux qui ont une note supérieure ou égale à 10 mais strictement inférieure à 20 et ceux qui ont eu 20. Combien de combinaisons y a-t-il ?
3. Le porfesseur souhaite faire 16 groupes de colles. Combien a-t-il de possiblités de composer de tels groupes de colles ?

Exercice *

Un fermier commence un élevage de lapins.

1. L'été, il achète 18 lapins et 18 casiers à lapins. Combien a-t-il de possiblités de remplir ses casiers, sachant qu'un casier doit être occupé par un et un seul lapin.
2. L'automne arrive et il a désormais 28 lapins. Il achète 18 casiers en plus. Combien a t-il maintenant de possiblité pour caser ses lapins ?
3. L'hiver, il souhaite remplir chaque casier avec deux lapins pour ne pas qu'ils prennent froid. Combien a-t-il de possibilité ?

Exercice

Quatre amis (Sud, Nord, Est et Ouest) jouent à la belote coinchée. Chacun des joueurs à une main composée de 8 cartes provenant d'un jeu de 32 cartes différentes les unes des autres. On suppose que le jeu a été mélangé avant la partie.

1. Combien de mains possibles Sud peut-il avoir en sa possession ?
2. On ne s'intéresse qu'au jeu de Sud et Nord : combien y a-t-il de possiblité pour composer leurs deux mains ?
3. Combien y a-t-il de distributions possibles des cartes ?

Exercice *

Dans une semaine a lieu le tirage au sort de la coupe du monde. 32 équipes sont qualifiées. Chacune posède un rang dans le classement FIFA dressé en fonction des résultats des matchs.

1. Combien y a-t-il de classements FIFA possibles, sachant qu'il n'y a pas deux équipe au même rang.
2. La confédération européenne (UEFA) comporte 54 fédération mais elle en a sélectionné 13 pour aller à la coupe du monde. Combien y a-t-il de possibilité de sélectionner 13 équipes dans les 54 fédérations européennes ?
3. Question bonus : pour effectuer le tirage au sort, on commence par trier les équipes en 4 chapeaux. Puis on compose 8 groupes de 4 équipes en prenant une équipe de chaque chapeau. Combien de tirages au sort sont possibles ?

Exercice

Un professeur donne un QCM à ses élèves. A chacune des 5 questions, les étudiants doivent répondre VRAI ou FAUX et ne peuvent pas ne rien répondre.

1. Combien y a-t-il de possiblité de répondre à ce QCM ?
2. On suppose qu'il y a exactement autant d'étudiants que de nombre de réponses et que chacun a donné une copie différent (c'est à dire qu'il n'y a qu'un seul étudiant avec 5/5 et un seul étudiant avec 0/5). Combien y a-t-il d'étudiant avec 2/5 ?

Exercice

Quatre amis (Sud, Nord, Est et Ouest) jouent à la belote coinchée. Chacun des joueurs à une main composée de 8 cartes provenant d'un jeu de 32 cartes différentes les unes des autres. On suppose que le jeu a été mélangé avant la partie.

1. Combien y a-t-il de mélanges possibles de ce jeu ?
2. Combien de mains Sud peut-il avoir en sa possession ?

Exercice *

Un homme lance cinq pièces en l'air. Une possède deux côté pile, deux possèdent deux côtés face et les deus dernières sont normales. Il ferme les yeus, en choisit une au hasard et la lance sur une table. Répondez aux trois questions suivantes et justifiez :

1. La pièce montre le côté face. Quelle est la probabilité que l'autre côté de la pièce soit également un côté face ?
2. On ne sait pas ce que montre la pièce mais on sait que le côté posé contre la table est une face. Quelle est la probabilité que l'autre côté de la pièce soit également une face ?
3. La pièce montre le côté face, mais une autre pièce choisie au hasard montre elle le côté pile. Quelle est le probilité que l'autre côté de la première pièce soit face ?

Exercice ***

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées. On tire k boules et on se munit d'un ticket de loterie sur lequel figurent k nombres de 1 à n (pas forcément différents). Quelle est la probabilité que le ticket soit gagnant (c'est à dire corresponde au tirage) dans les 4 cas suivants :

1. On remet la boule dans l'urne après chaque tirage et l'ordre des numéros sur le ticket compte ?
2. On ne remet pas la boule et l'ordre des numéros ne compte pas ?
3. On ne remet pas la boule et l'ordre des numéros compte ?
4. On remet la boule et l'ordre des numéros ne compte pas ?

Exercice *

Quatre amis (Nord, Sud, Est et Ouest) jouent au Texas Hold'em poker. Chaque joueur a deux cartes dans sa main et on pose cinq cartes sur la table. Le jeu de chaque joueur se compose de la meilleure combinaison de cinq cartes prises parmi ses deux cartes et les cinq cartes sur la table.

1. Quelle est la probabilité d'avoir une couleur, c'est à dire cinq cartes de la même couleur dans son jeu.
2. Sud a deux carreaux dans sa main. Quelle est la probabilité qu'il ait une couleur ?
3. Il y a trois carreaux sur la table, quelle est la probabilité que Sud ait une couleur ?

Exercice 1

Quatre amis (Nord, Sud, Est et Ouest) jouent au Texas Hold'em poker. Chaque joueur a deux cartes dans sa main et on pose cinq cartes sur la table. Le jeu de chaque joueur se compose de la meilleure combinaison de cinq cartes prises parmi ses deux cartes et les cinq cartes sur la table.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré (quatre cartes de même valeurs) dans son jeu ?
2. Nord a deux as dans sa main. Quelle est la probabilité qu'il ait un carré d'as dans son jeu ?
3. Il y a deux as sur la table. Quelle est la probabilité que Nord ait un carré d'as ?

Exercice **

Problème des danseurs : n couples mariés se rendent à une soirée dansante. Après un tirage au sort, on forme n couples de danseurs de manière aléatoire uniforme. On note $B_k^{(n)}$ l'événement "k couples de mariés dansent ensemble" et A_k l'événement "le k-ième couple de marié danse ensemble

1. Exprimez l'évenement $B_k^{(n)}$ en fonction des événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ pour tout $0 \leq k \leq n$.
2. Calculez $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$ pour tout $k \leq n$.
3. Montrez que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_l\leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l})$.
4. Calculez $P(B_0)$ et montrez que $\left(P\left(B_0^{(n)}\right)\right)_n$ converge quand n tend vers plus l'infini vers une limite non nulle.

Exercice

Je joue au black jack : le croupier me distribue deux cartes pris dans un tas de cartes suffisamment grand pour qu'on suppose que la valeur et la couleur de chaque carte est aléatoire uniformément et indépendant du tirage des autres cartes (par exemple, à tous moments, le probabilité de tirer un as de trèfle est $1/52$, indepédamment de ce qui a été tiré avant).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un black jack, c'est à dire un as et une figure ou un dix ?
2. Ma première cartes est un dix ou une figure. Quelle est la proabilité que je dépasse 16 avec ma deuxième carte, sachant qu'un as vaut 11 points et les figures 10 ?
3. J'ai dépassé 16. Quelle est la probabilité que j'aie un dix ou une figure dans mon jeu ?

Exercice **

On jette un bâton en l'air et il se brise en trois parties deux longueurs aléatoires uniformes. Quelle est le probabilité qu'on puisse construire un triangle avec les trois segments ainsi créés ?

Exercice

Soient (Ω, P) un espace de probabilité (ou univers), A, B, C deux événements.

1. Montrez que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. Proposez une formule pour $P(A \cup B \cup C)$ (indication : faîtes un dessin)
3. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que A soit indépendant de lui-même.

Exercice

Une équipe de football gagne chacun de ses matchs avec probabilité $\frac{4}{7}$. Si elle prend un but, elle gagne avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. On note A l'événement "l'équipe gagne le match", B_1 "l'équipe a marqué un but" B_2 "l'équipe marqué deux buts". Montrez que et $P(B_1) > 0$ $P(B_2) > 0$.
2. Exprimez les hypothèses suivantes à l'aide de calculs de probabilités : si l'équipe marque un but, la probabilité qu'elle gagne est $\frac{5}{7}$, si elle marque deux buts, cette probabilité devient $\frac{6}{7}$.
3. Calculez la probabilité que l'équipe ait marqué un but sachant qu'elle a gagné. Calculez la probabilité qu'elle est marquée deux buts sachants qu'elle a gagné.

Exercice

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée en l'air de manière indépendante.

1. Quelle est le probabilité qu'on n'ait jamais obtenu de lancer "face".
2. Quelle est la probabilité qu'on ait eu exactement k lancers "face" avec $1 \leq k \leq n$.
3. Quelle est la probabilité qu'il faille attendre k lancers avant d'obtenir "face" avec $0 \leq k \leq n$.

Exercice

On lance de manière indépendante deux dés à six faces parfaitement équilibrés et on compte la somme des deux dés.

1. Quelle est la probabilité que les deux dés montrent deux faces différentes ?
2. Quelle est le probabilité que l'un des deux montre la face "deux" sachant que la somme des deux dés est cinq ?
3. On note A, B, C les événements $A =$ "La somme des dés est sept" $B =$ "Un des deux dés montre la face "trois"" et $C =$ "Un des deux dés montre la face "quatre"".

Exercice

La duchesse d'Aquitaine et la duchesse de Bourgogne attendent indépendamment l'héritier de leur duché et espèrent faire une alliance en mariant les deux enfants attendus, mais chaque duc préfèrerait avoir un garçon. On va considérer les trois événements suivants :

A l'héritier d'Aquitaine est un garçon
B l'héritier de Bourgogne est un garçon
C les deux héritiers sont de même sexe

1. Exprimez l'événement C en fontion des événements A et B.
2. On suppose que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Les évenements A,B,C sont ils indépendants dans leur ensemble ? Indépendants deux à deux ?
3. On suppose que $P(A) = P(B) = p \in [0, 1]$. Trouvez les valeurs de p pour que A et C soient indépendants.

Exercice

on lance deux dés parfaitement équilibrés de manière indépendante et on fait la somme des deux faces obtenues. On note A_i l'événement "le premier dé montre la face i" et B_i l'événement "le deuxième" dé montre la face i" pour $i \in \{1, \ldots, 6\}$

1. Exprimez les événements C, D, E en fonction des événements $(A_i)_i$ et $(B_i)_i$: $C=$"la somme des deux dés fait 7", $D=$"un dé montre la face 4" et $E=$"un dé montre la face 3".
2. Les événements C, D, E sont-ils deux à deux indépendants ? Sont-ils indépendants dans leur ensemble ?
3. Calculez $P(C \mid D)$ (probabilité de C sachant que D est réalisé) puis $P(D \mid C)$.

6.2 Variables aléatoires

Exercice

On effectue un sondage dans la poulation française sur la réponse à un référendum. On suppose que le OUI remporte 60% des suffrages. On suppose qu'on effectue le sondage sur 1000 personnes. Ce nombre est suffisamment petit pour qu'on considère que les réponses des sondés sont indépendantes.

1. Modélisez mathématiquement l'énoncé à l'aide de variables de Bernoulli.
2. Quelle est la probabilité que le sondage reflète exactement la répartition des voix ?
3. On suppose à présent qu'on ne sonde que 10 personnes. La probabilité que le sondage refète exactement la répartition des voix est elle supérieure, égale ou inférieure à celle obtenue avec 1000 personnes. Expliquez pourquoi les instituts de sondage préfère interroger 1000 personnes que 10.

Exercice **

Deux amis jouent au jeu de société "Risk". Le but pour le joueur A est de conquérir le territoire du joueur B, défendu par 2 bataillons, à l'aide de 3 bataillons. On note $\mathcal{A}$ l'événement : "Le joueur A gagne".

1. Dans ce mode de jeu, les deux joueurs lancent tous leurs dés et celui qui fait le plus gros score gagne. S'il y a match nul, le joueur B gagne. Exprimez l'événement $\mathcal{A}$" à l'aide de variables aléatoires.
2. Dans ce mode jeu, celui qui a le meilleur dé gagne (et le joueur B gagne en cas de match nul). Exprimez l'événement $\mathcal{A}$ à l'aide de variables aléatoires et de la fonction $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } b \geq a \end{cases}$.
3. Dans ce mode de jeu, on compare le meilleur dé de chacun des deux jours et le second dé de chacun des deux joueurs. Chaque joueur perd un bataillon par duel perdu. Exprimez l'évenement "le joueur B perd ses deux bataillons" à l'aide de variables alétoires, de la fonction $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } b \geq a \end{cases}$ et de la fonction $\min(a,b,c) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \text{ et } a \geq c \\ b & \text{si } b \geq a \text{ et } b \geq c \\ c & \text{si } c \geq a \text{ et } c \geq b \end{cases}$.

Exercice

On étudie la probabilité d'une équipe de football de sortir de son groupe de coupe du monde. L'équipe a trois matchs à jouer. On suppose qu'elle gagne, qu'elle perd et qu'elle fait match nul avec la même probabilité $1/3$, indépendamment de ses résultats passés. Une victoire rapporte 3 points, un match nul 1 point et une défaite 0 point.

1. Modélisez mathématiquement l'énoncé précédent à l'aide de variables aléatoires.
2. Donnez la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de points après les trois matchs.
3. Calculez $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice **

On appelle variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in [0,1]$, noté $\mathrm{Geo}(p)$ une variable aléatoire qui vérifie $P(X = k) = p^k(1-p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Calculez l'espérance d'une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in [0,1]$.
2. Soient X une variable aléatoire géométrique. Montrez que $P(X \geq n+m \mid X \geq m) = P(X \geq n)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.
3. Soit X une variable aléatoire discrète qui vérifie $P(X \geq n+m \mid X \geq m) = P(X \geq n)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Montrez que X est une variablé aléatoire géométrique.

Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoire uniformes $\{0, \ldots, n\}$ indépendantes.

1. Donnez la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
2. Donnez l'espérance et la variance de $X+Y$ en fonction de n.
3. Donnez la loi, l'espérance et la variance de $X-Y$ en fonction de n.

Exercice

Un joueur joue à la roulette. Il mise toujours sur la couleur rouge. Si la bille tombe tombe sur un nombre "rouge", il remporte deux fois sa mise (si il a misé 1 Euro, il remporte 2 Euros donc son bénéfice est de 1 Euro), si la bille tombe sur un nombre "noir" ou sur le zéro, il perd sa mise (bénéfice =-1 Euro). Il y a 37 cases dans la roulette, 18 noires, 18 rouges et le zéro.

1. Le joueur joue n fois 1 Euro. Modélisez l'énoncé mathématiquement et calculez le gain moyen du joueur.
2. On suppose que le joueur commence par jouer 1 Euro. S'il gagne il s'arrête et s'il perd, il mise 2 Euros. S'il gagne, il s'arrête et s'il perd, il mise 4 Euros etc... Montrez que sa stratégie est gagnante à tous les coups.
3. Expliquez pourquoi la roulette comporte une case "zéro" et pourquoi le casino pose une mise maximale.

Exercice

Un étudiant répond à un QCM comportant 5 questions. Il répond juste avec probabilité $p \in [0,1]$ aux quatre premières questions. La cinquième question est une question piège. Il y répond juste avec probabilité $\frac{p}{2}$. Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,5 points et une absence de réponse rapporte 0 point.

1. Modélisez mathématiquement ce problème à l'aide de variables aléatoires.
2. Calculez son gain moyen s'il répond à toutes les questions.
3. Caclulez son gain moyen s'il décide de ne pas répondre à la dernière question.

Exercice

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$.

1. On pose A l'événement "il existe $k \geq 1$ tel que $X_k \neq 6$". Montrez que $P(A) = 1$.
2. On pose $K := \min\{k \geq 1 \mid X_k \neq 6\}$ et $X := X_K$. Déterminez la loi de la variable aléatoire X_K.
3. Cinq jeunes veulent tirer au sort un capitaine de soirée mais ils ne disposse que d'une dé à six faces parfaitement équilibré. Comment peuvent ils procéder pour que le tirage au sort soit équitable ? Justifiez.

Exercice

Soient X_1, X_2 2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$. Donnez les loi des variables aléatoires suivantes

1. $X = X_1 + 6$
2. $X = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 = 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $X = X_1 + 6.(X_2 - 1)$

Exercice

Un étudiant qui n'a pas assez révisé répond à un QCM au hasard. Le QCM comprend 5 questions à 2 réponses A ou B (l'une est juste, l'autre est fausse). Chaque bonne réponse lui rapporte 1 point, chaque mauvaise réponse lui enlève 0,5 points. L'élève choisi de répondre avec probabilité $1/2$ la réponse A et avec probabilité $1/2$ la réponse B.

1. Modélisez mathématiquement ce problème à l'aide de variables aléatoires.
2. Quelle est la probabilité qu'il réponde qu'une fois la bonne réponse ?
3. Calculez son gain de points moyen.

Exercice

Déterminez la loi et l'espérance des variables aléatoires suivantes :

1. $X = B_1U_1 + (1 - B_1)\,U_2$ où B_1 est une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et U_1 une loi uniforme sur $\{3,4\}$ et U_2 une loi uniforme sur $\{5,6\}$.
2. $Y = B_1U_1 + (1 - B_1)\,U_3$ où U_3 est un loi uniforme sur $\{5,6,7,8\}$.
3. $Z = f\,(U)$ où U est une loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$ et f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.