Théorème de Cauchy-Lipschitz

10 mai 2013

Théorème. *Soit* U *un ouvert de* $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \|\cdot\| \otimes |\cdot|)$, $C > 0$ *et* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *continue localement* C*-lipschitzienne en la première variable. Alors, pour tout* $(x_0, t_0) \in U$, *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que le problème de Cauchy*

$$(CL) : \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{ds}(s) & = & f(x(s), s) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

admette une unique solution $x \in C^0(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[, \mathbb{R}^n)$ *dérivable sur* $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$.

Démonstration. Schéma de la démonstration

1) On construit $\epsilon > 0$, $J_\epsilon \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et une application $\phi : J_\epsilon \to J_\epsilon$

2)ϕ est $\frac{1}{2}$-lipschtzienne

3) $x \in J_\epsilon$ est l'unique point fixe de ϕ si et seulement si x est solution du problème de Cauchy (CL)

1) Soit $(x_0, t_0) \in U$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 et $\epsilon_1 > 0$ tels que f soit C-lipschtizienne en la seconde variable sur $V \times [t_0 - \epsilon_1, t_0 + \epsilon_1]$ (existence garantie par l'hypothèse "f localement lipschitzienne en la seconde variable"). On pose $r_1 > 0$ tel que $\overline{B(x_0, r_1)} \subset V$.

f étant continue, elle est bornée au voisinage de (x_0, t_0) : il existe $M \geq 0$, $\epsilon_2 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que pour tout $(x, t) \in \overline{B(x_0, r_2)} \times [t_0 - \epsilon_2, t_0 + \epsilon_2]$, $\|f(x, t)\| \leq M$.

On pose à présent $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, $\epsilon C \leq \frac{1}{2}$ et $\epsilon M \leq \min(r_1, r_2)$. On pose $r = \epsilon M$.

On pose $J_\epsilon := C^0([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, r)})$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi : & J_\epsilon & \to & J_\epsilon \\ & x & \mapsto & \phi x : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s).ds \end{array}$$

Pour tout $x \in J_\epsilon$, l'application $\begin{array}{ccc} [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] & \to & \mathbb{R}^n \\ s & \mapsto & f((x(s), s)) \end{array}$ est continue par continuité de x et de f. Comme f est bornée sur $\overline{B(x_0, r)} \times [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, $s \mapsto (x(s), s)$ est intégrable sur $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. ϕx est continue par continuité de f et $\|x_0 - \phi x(t)\| \leq \mid t - t_0 \mid \cdot M \leq \epsilon M = r$ donc $\phi x(t) \in \overline{B(x_0, r)}$ et ϕ est bien définie. Alors, pour x_1 et x_2 dans J_ϵ on a pour $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$,

$$\begin{array}{rcl} |\phi x_1(t) - \phi x_2(t)| & = & \left| \int_{t_0}^t (f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)) ds \right| \\ & \leq & \left| \int_{t_0}^t \|f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)\| \, ds \right| \\ & \leq & C. \left| \int_{t_0}^t \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds \right| \\ & \leq & C. |t - t_0| \, \|x_1 - x_2\|_\infty \\ & \leq & C\epsilon. \|x_1 - x_2\|_\infty \\ & \leq & \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty \\ & \Updownarrow & \\ \|\phi x_1 - \phi x_2\|_\infty & \leq & \frac{1}{2} \cdot \|x_1 - x_2\|_\infty \end{array}$$

Donc ϕ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $(J_\epsilon, \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet. ϕ admet un unique point fixe sur J_ϵ que l'on note x.

Montrons que x est solution de (CL) : la continuité de l'application $s \mapsto (x(s), s)$ montre que x est dérivable et $x'(t) = f(x(t), t)$. De plus $x(t_0) = x_0$ donc on obtient le résultat.

Si $y \in C^0(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[, \mathbb{R}^n)$ dérivable est solution du problème de Cauchy (CL), alors pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, $\int_{t_0}^t \frac{dy}{ds}(s) ds = \int_{t_{à}}^t f(y(s), s) ds$ soit $y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(y(s), s) ds$ donc $y = x$. □

Théorème. *(Point fixe de Picard) : Soit (E,d) un espace métrique complet, $0 < k < 1$ et $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne. Alors, f admet un unique point x fixe dans E (i.e $f(x) = x$). De plus, la suite itérée définie par* $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ *converge vers x.*

Démonstration. Unicité : Supposons que $x_1, x_2 \in E$ et $f(x_1) = x_1,\ f(x_2) = x_2$. Alors $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq kd(x_1, x_2)$ d'où

$$(1-k)d(x_1, x_2) \leq 0 \Leftrightarrow (1-k)d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

car $0 < 1 - k < 1$.

Existence : On considère la suite $(x_n)_n$ définie comme précédemment. Par récurrence, on a $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. En effet, $d(x_0, x_1) = k^0 d(x_0, x_1)$ et si $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n.d(x_0, x_1)$, alors $d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq k.d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n+1}.d(x_0, x_1)$. $(x_n)_n$ est de Cauchy : soient $n < m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_m) & \leq & d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ & \leq & k^n d(x_0, x_1) + k^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + k^{m-1} d(x_0, x_1) \\ & \leq & k^n (1 + \ldots + k^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \\ & \leq & \dfrac{k^n - k^m}{1-k}.d(x_0, x_1) \underset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}$$

Comme (E,d) est complet, $(x_n)_n$ converge vers $x \in E$. Montrons que $x = f(x)$. f est continue car lipschitzienne donc $y \mapsto d(y, f(y))$ est continue par continuité de la "fonction distance". Ainsi, $d(x, f(x)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+\&}) = 0$ car $(x_n)_n$ est de Cauchy. $\square$

Leçons concernées :
205 Espaces complets. Exemples et applications
206 Théorèmes du point fixe. Exemples et applications
220 Equations différentielles X'=f(t,X). Exemples d'études qualitatives de solutions

Références

[1] Gostiaux. Cours de mathématiques spéciales. Tome 3. PUF

[2] Madère. Préparation à l'oral de l'agrégation. Développements d'analyse. Ellipse