Le problème des danseurs

30 juin 2013

Au cours d'une soirée, n couples de mariés viennent danser. Après un tirage au sort, on forme n couples de danseurs de manière aléatoire uniforme. La probabilité qu'aucun couple de mariés ne danse ensemble est $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$. La probabilité qu'exactement m couples de mariés dansent ensemble est $\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-m}\frac{1}{(n-m)!}\right)$.

Démonstration. On note pour tout $0 \leq k \leq n$, $B_k^{(n)}$ l'événement : "k coupls de maréis dansent ensemble". $\square$

Lemme. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilbisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{F}^n$ une suite d'événements. Alors,*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l})$$

Démonstration. Par récurrence sur n :
Pour $n = 1$, le résultat est trivial
Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Supposons le résultat vrai au rang n. Alors,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \\ &= P(A_{n+1}) + \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}) - \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l} \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{l=1}^{n+1}(-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n+1} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}) \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. $\square$

Reprise de la démonstration :
On numérote de 1 à n tous les couples de mariés. On note A_i pour $1 \leq i \leq n$ l'évenement "le i-è couple de mariés danse encemble". Alors, $B_0^{(n)} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{c}}$ et $B_0^{(n)\mathrm{c}} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Notons que pout $1 \leq l \leq n$, $\#\{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n\} = \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ et que $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}) = \frac{(n-l)!}{n!}$ avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n$. En effet, la probabilité que le couple i_1 danse ensemble est $\frac{1}{n}$. Il reste alors $n-1$ couples et la probabilité que le couple i_2 danse ensemble

est alors $\frac{1}{n-1}$. La probabilité que les couples i_1 et i_2 dansent respectivement ensemble est $\frac{1}{n(n-1)}$. En raisonnant de même on obtient $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}) = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-l+1)} = \frac{(n-l)!}{n!}$. En utilisant le lemme, on a donc

$$\begin{aligned}
P(B_0^{(n)}) &= 1 - P(B_0^{(n)c}) = 1 - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}) \\
&= 1 - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} \frac{(n-l)!}{n!} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{l} \frac{n!}{l!(n-l)!} \cdot \frac{(n-l)!}{n!} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^l}{l!} \\
&= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Remarque. $P(B_0^{(n)}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-1} > 0$

$B_m^{(n)} =$ "m couples de mariés dansent ensemble et $n - m$ couples ne dansent pas ensemble" donc

$$\begin{aligned}
P\left(B_m^{(n)}\right) &= P\left(\bigcup_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i_1, \ldots, i_m}} A_k^c \right) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i_1, \ldots, i_m}} A_k^c \right)
\end{aligned}$$

car les événements sont disjoints

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}\right) \cdot P\left(\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i_1, \ldots, i_m}} A_k^c \mid A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m} \right) \\
&= \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \cdot \frac{(n-m)!}{n!} \cdot P(B_0^{(n-m)}) \\
&= \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} \right)
\end{aligned}$$

Leçon concernée :

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Références

[1] Jean-Yves Ouvrard. Probabilités 1. Cassini. (cherchez à problème des chapeaux)