DEVELOPPEMENT : DIMENSION MAXIMALE D'UN SEV DE $M_n(\mathbb{R})$ DE MATRICES DE RANG $\leq p$. *

Théorème : Soit V un sev de $M_n(\mathbb{R})$ tel que, pour toute $M \in V$ $rg(M) \leq p$.
Alors $\dim V \leq np$.

Démonstration : Schéma : i) On se ramène au cas où V contient $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

ii) On montre que toute matrice de V peut s'écrire $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right)$ où $A \in M_p(\mathbb{R})$ $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-p,p}(\mathbb{R})$ avec $BC = 0$.

iii) On conclut en considérant $\varphi : V \longrightarrow M_p(\mathbb{R}) \times M_{p,n-p}(\mathbb{R})$
$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \longmapsto (A, {}^tB + C)$$

i) On peut supposer que V contient une matrice de rang p.
Sinon on remplace p par $p' = \max\{rg M \,/\, M \in V\}$.
Soit donc $M \in V$ une matrice de rang p.
Il existe $R, S \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $M = R \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{notée } P} S^{-1}$. (cf annexe).

On considère alors $V' = \{R^{-1}MS \,/\, M \in V\}$
et $\phi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto R^{-1}MS$. ϕ est linéaire, bijective car $R, S \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\phi(V) = V'$
donc V et V' ont même dimension.
De plus si $M' \in V'$ alors il existe M de rang $\leq p$ telle que $M' = R^{-1}MS$ donc M' et M sont semblables donc ont même rang : $rg(M') \leq p$.
On montre donc le résultat dans le cas où V contient $\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

ii) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in V$ $A \in M_p(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-p,p}(\mathbb{R})$, $D \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{R})$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $M - \alpha P \in V$ car V sev, donc $\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha I_p & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in V$.
En particulier $\text{rang}(M - \alpha P) \leq p$.
On considère une matrice d'ordre $p+1$ extraite de $M - \alpha P$ bordant la matrice $A - \alpha I_p$ donc de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha I_p & X_i \\ \hline Y_j & d_{ij} \end{array}\right)$ où X_i $i$ème ligne de B, Y_j $j$ème ligne de C. d_{ij} quelconque dans D.

Les entiers i et j étant fixés on considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \longmapsto \det\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha I_p & X_i \\ \hline Y_j & d_{ij} \end{array}\right)$.
c'est une fonction polynomiale en α.
Comme $M - \alpha P$ est de rang $\leq p$ on a $rg\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha I_p & X_i \\ \hline Y_j & d_{ij} \end{array}\right) \leq p$.
Or $\left(\begin{array}{c|c} A - \alpha I_p & X_i \\ \hline Y_j & d_{ij} \end{array}\right) \in M_{p+1}(\mathbb{R})$ donc $f(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ainsi $f \equiv 0$ donc tous ses coefficients sont nuls.

En développant par rapport à la dernière ligne (ou colonne) on montre que le coefficient de α^p est $(-1)^p d_{ij}$. On a donc $d_{ij} = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i, j \leq n-p$ on a $D = 0$.
On cherche maintenant le coefficient de α^{p-1} dans $f(\alpha)$.

Pour ce faire on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de $\begin{pmatrix} A \\ Y_i \end{pmatrix}$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $Z = \begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda) = \det(C_1 - \lambda e_1, C_2 - \lambda e_2, \dots, C_p - \lambda e_p, Z)$.

Par multilinéarité du déterminant, on montre que le coefficient de λ^{p-1} est donné par

$$\sum_{k=1}^{p} \det(-e_1, \dots, -e_{k-1}, C_{k}, -e_{k+1}, \dots, -e_p, Z).$$

Or on a : $\det(-e_1, \dots, -e_{k-1}, C_k, -e_{k+1}, \dots, -e_p, Z)$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & -1 & & \vdots & & & & \vdots \\ | & 0 & \ddots & a_{kk} & & & & y_k \\ & | & & \vdots & -1 & & & \vdots \\ 0 & & & a_{p,k} & & & -1 & y_p \\ 0 & 0 & & x_k & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la 1e colonne, puis la 2e colonne, jusqu'à la $k-1$ ème colonne jusqu'à obtenir :

$$\det(-e_1, \dots, -e_{k-1}, C_k, -e_{k+1}, \dots, -e_p, Z) = \begin{vmatrix} a_{k,k} & 0 & \cdots & 0 & y_k \\ \vdots & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ a_{p,k} & & & -1 & y_p \\ x_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \times (-1)^{k-1}.$$

Il reste dans ce déterminant $p+1-(k-1) = p-k+2$ colonnes.
On développe par rapport à la 2e colonne, puis la 3e colonne, jusqu'à la $p+k-1$ ème colonne. On a alors :

$$\det(-e_1, \dots, -e_{k-1}, C_k, -e_{k+1}, \dots, -e_p, Z) = (-1)^{k-1}(-1)^{p-k} \begin{vmatrix} a_{k,k} & y_k \\ x_k & 0 \end{vmatrix} = (-1)^p x_k y_k.$$

Le coefficient de λ^{p-1} est donc $\sum_{k=1}^{p} (-1)^p x_k y_k = (-1)^p X_i Y_j$.
Celui-ci est nul donc $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n-p\}$ $X_i Y_j = 0$ or $X_i Y_j$ est le coefficient d'indice ij de BC donc $BC = 0$.

iii) On considère $\varphi : V \to M_p(\mathbb{R}) \times M_{p,n-p}(\mathbb{R}) = E$
$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \mapsto (A, {}^tB + C).$$

φ est clairement linéaire.
Elle est injective : si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \in V$ est tel que $\varphi(M) = (0,0)$ on a $A = {}^tB + C = 0$ et comme $BC = 0$ on a $B{}^tB = -BC = 0$.
Or pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ le coefficient d'indice kk de $B{}^tB$ est $\sum_{j=1}^{n-p} b_{jk}^2$ donc $b_{jk} = 0$ pour $1 \leq k \leq p$, $1 \leq j \leq n-p$, donc $B = 0$ et comme ${}^tB + C = 0$, $C = 0$.
De l'injectivité de φ on déduit que $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leq \dim E$.
Or $\dim E = p^2 + p(n-p) = np$ donc $\dim(V) \leq np$.

Franchon Gianella - Algèbre 1.