Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants dans $S(\mathbb{R})$

1er juin 2013

On cherche à résoudre une équation différentielle linéaire du type $(E) : -g'' + g = f$ où $f \in S(\mathbb{R})$.

1 Solution particulière de $-g'' + g = f$

Cherchons une solution de (E) dans le cas où $g, f \in S(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} -g'' + g = f &\Leftrightarrow -\mathcal{F}(g'') + \mathcal{F}g = \mathcal{F}f \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \lambda^2 \mathcal{F}g(t) + \mathcal{F}g(t) = \mathcal{F}f(t) \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}g(t) = \frac{1}{1+t^2}\mathcal{F}f(t) \\ &\Leftrightarrow g = \left(\mathcal{F}^{-1}(s)\right) * f \end{aligned}$$

avec $s : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. On remarque $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{1+t^2} \right| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$ donc $s \in L^1(\mathbb{R})$. Calculons donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}^{-1}(s)(x)$: pour $x = 0$, on a $\left(\mathcal{F}^{-1}(s)\right)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\lambda = \frac{1}{2}$. Pour $x > 0$,

$$\left(\mathcal{F}^{-1}(s)\right)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

On calcule cette intégrale par le théorème des résidus : On pose Γ le demi-disque de centre 0 et de rayon $R > 1$ paramétré par $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ avec $\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [-R, R] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & it \end{array}$ et $\gamma_2 : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & Re^{-i\theta} \end{array}$ et on intègre sur Γ la fonction $\sigma : t \mapsto \frac{e^{xt}}{1-t^2} = \frac{e^{xt}}{(1-t)(1+t)}$. La fonction σ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet un pôle simple dans Γ, la racine -1. On a $\mathrm{Res}(\sigma, -1) = (1+t) \left. \frac{e^{tx}}{(1+t)(1-t)} \right|_{t=-1} = \frac{e^{-x}}{2}$ et donc, d'après le théorème des résidus,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x}}{2} = \mathrm{Res}(\sigma, -1) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{e^{tx}}{1-t^2} dt + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{e^{tx}}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-R}^{R} i \cdot \frac{e^{itx}}{1-(it)^2} dt + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -iRe^{-i\theta} \frac{e^{x \cdot Re^{-i\theta}}}{1 - R^2 e^{-2i\theta}} d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \left(\mathcal{F}^{-1}(s)\right)(x)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Re^{-i\theta} \frac{e^{x \cdot Re^{-i\theta}}}{1 - R^2 e^{-2i\theta}} d\theta}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$

En effet pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\left| Re^{-i\theta} \frac{e^{x \cdot Re^{-i\theta}}}{1-R^2e^{-2i\theta}} \right| = R \frac{e^{xR\cos\theta}}{|1-R^2e^{-2i\theta}|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\cos\theta \leq 0$ et $\frac{R}{|1-R^2e^{-2i\theta}|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $R > 2$, $\left|1 - R^2 e^{-2i\theta}\right| \geq R^2 - 1 \geq R$ et donc $\left| Re^{-i\theta} \frac{e^{x \cdot Re^{-i\theta}}}{1-R^2e^{-2i\theta}} \right| = R \frac{e^{xR\cos\theta}}{|1-R^2e^{-2i\theta}|} \leq e^{xR\cos\theta} \leq e^x$ qui est intégrable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et indépendant de R donc le théorème de convergence dominée nous permet de montrer la convergence du membre de droite.

De la même manière, pour tout $x < 0$, en intégrant sur le demi-cercle symétrique par rapport à l'axe des imaginaires, on obtient $\left(\mathcal{F}^{-1}(s)\right)(x) = \frac{e^x}{2}$ d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) := \left(\mathcal{F}^{-1}(s)\right)(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$.

Proposition. *Soit* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}e^{-|x|} \end{array}$. *Alors, h est une solution fondamentale de (E) : pour tout $f \in S(\mathbb{R})$, $h * f \in S(\mathbb{R})$ et pour tout $g, f \in S(\mathbb{R})$, $-g'' + g = f \Leftrightarrow g = h * f$.*

Démonstration. $h \in L^1(\mathbb{R})$: en effet, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{-|x|}}{2}\right| dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{2} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc $\mathcal{F}f$ existe et $\mathcal{F}f = s$. Or $s \in C^\infty(\mathbb{R})$ et toutes ses dérivées sont bornées donc $\mathcal{F}(f * h) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}h) \in S(\mathbb{R})$. L'application $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ étant bijective, on sait que $f * h \in S(\mathbb{R})$. Le reste de la démonstration découle de l'étude qui précède. $\square$

2 Solutions homogènes

On recherche une solution de la forme $g(x) = e^{\lambda x}$. L'équation caractéristique de (E) est $-\lambda^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\lambda = \pm 1$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, soit en posant $A = \alpha + \beta$ et $B = \alpha - \beta$, $g(x) = A\mathrm{ch}(x) + B\mathrm{sh}(x)$. L'application $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ce qui amène la proposition suivante :

Proposition. *Soit $(E) : -g'' + g = f$ où $f \in S(\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de (E) est $\{A\mathrm{ch} + B\mathrm{sh} + h * f \mid A, B \in \mathbb{R}\}$ avec* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}e^{-|x|} \end{array}$.

3 Une équation différentielle au sens des distributions

Proposition. $-h'' + h = \delta_0$ *au sens des distributions.*

Démonstration. h est bornée donc $T_h \in S'(\mathbb{R})$: en effet, pour tout $f \in S(\mathbb{R})$, $\langle T_h, \cdot\rangle : \begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} h(t)f(t)dt \end{array}$ est bien définie car $\int_{\mathbb{R}} |h(t)f(t)|\, dt \leq \|h\|_\infty \int |f(t)|\, dt$, linéaire par linéarité de l'intégrale et continue d'après l'inégalité précédente.

$\mathcal{F}(-(T_h)'' + T_h) = (\lambda^2 + 1)\mathcal{F}(T_h) = (\lambda^2 + 1)T_{\mathcal{F}h} = (\lambda^2 + 1)T_{\frac{1}{1+\lambda^2}} = T_1 = \delta_0$. En effet, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_{\delta_0} f = \langle \delta_0, \mathcal{F}f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i.0.t}dt = \int_{\mathbb{R}} f(t).1.dt = T_1(f)$$

$\square$

Leçons concernées :
221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.
254 Espaces de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$.
255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.