Construction de fonction plateaux

2 juin 2013

Ce problème répond à la question suivante, fondamental en théorie des ditributions : Puis-je prolonger une fonction f telle que $f_{|[-n,n]} \equiv 1$ et $f_{|]-n-1,n+1[^c} \equiv 0$ en une fonction $\widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \widetilde{f} \leq 1$? La réponse est oui, mais le problème n'est pas trivial.

Théorème. *Soit $\Omega \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$ un ouvert, $K \subset \Omega$ un compact et $\mathcal{O} \subset K$ un ouvert tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_{|K} \equiv 1$ et $\varphi_{|\mathcal{O}^c} \equiv 0$ et $0 \leq \varphi \leq 1$.*

Démonstration. Schéma de la preuve :

1) Construction pour tout $\epsilon > 0$ de $\rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, i) $\rho_\epsilon \geq 0$, ii) supp$\rho_\epsilon \subset [-\epsilon, \epsilon]$, iii) $\int \rho_\epsilon = 1$

2) Construction pour tout $\epsilon > 0$ et tout compact K de $\mathbb{R}$ de $\theta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \theta_\epsilon \leq 1$, $\theta_{\epsilon|K} \equiv 1$ et $\theta_{\epsilon|K_{2\epsilon}^c} \equiv 0$ avec $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}, d(x,K) \leq \delta\}$ avec d la distance induite par $|\cdot|$.

3) Conclusion

1) On pose $\rho_0 = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$

$\rho_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$: en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, ρ_0 est k fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\rho_0^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x^2-1)^{2k}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ où $P_k \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré inférieur strictement à $2k$. Donc, ayant $\lim\limits_{X \to 0^-} \frac{1}{X^2} \exp\left(\frac{1}{X}\right) = 0$, on a $\rho_0^{(k)}(x) \underset{x \to \pm 1}{\longrightarrow} 0$ et $\rho_0^{(k)}$ est continue. Par ailleurs, supp$\rho_0 = [-1,1]$ et $\int \rho_0(x)dx > 0$. On pose alors $\rho(t) = \frac{\rho_0(t)}{\int \rho_0(x)dx}$ et $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{x}{\epsilon})$. Alors, $\rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, supp$\rho_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]$ et $\int \rho_\epsilon(x)dx = \frac{1}{\epsilon}\int \rho(\frac{x}{\epsilon})dx = \int \rho(u)du = 1$.

2) On pose $\theta_\epsilon(x) = \rho_\epsilon * 1_{K_\epsilon} = \int \rho_\epsilon(x-y) 1_{K_\epsilon}(y)dy$. θ_ϵ est bien définie car ρ_ϵ et 1_{K_ϵ} sont mesurables et on a

$$0 \leq \theta_\epsilon(x) \leq \int \rho_\epsilon(y)dy = 1$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $\theta_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si on note $\psi : (x,y) \mapsto \rho_\epsilon(x-y)1_{K_\epsilon}(y)$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^k \psi}{\partial x^k}(x,y)\right| &= \left|\rho_\epsilon^{(k)}(x-y)1_{K_\epsilon}(y)\right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\rho_\epsilon^{(k)}(x)\right| 1_{K_\epsilon(y)} \end{aligned}$$

qui est intégrable et indépendant de x car $\rho_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et K_ϵ est compact car fermé et borné.

Soit $x \in K_{2\epsilon}^c$ i.e $d(x,K) > 2\epsilon$. Alors, pour tout $y \in K_\epsilon$,

$$|x-y| \geq |d(x,K) - d(y,K)| \geq ||d(x,K)| - |d(y,K)|| = |d(x,K)| - |d(y,K)| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$$

donc $\rho_\epsilon(x-y) = 0$ pour tout $x \in K_{2\epsilon}^c$, $y \in K_\epsilon$ et $\theta_{\epsilon|K_{2\epsilon}^c} \equiv 0$.

Soit $x \in K$, comme $\int \rho_\epsilon(t)dt = 1$, on a

$$1 = \int \rho_\epsilon(x-y)1_{K_\epsilon}(y)dy + \int \rho_\epsilon(x-y)1_{K_\epsilon^c}(y)dy$$

donc $\theta_\epsilon(x) = 1 - \int \rho_\epsilon(x-y)1_{K_\epsilon{}^c}(y)dy$. Or, pour tout $y \in K_\epsilon^c$, comme $x \in K$,

$$|x-y| \geq d(y,K) > \epsilon$$

donc $\int \rho_\epsilon(x-y)1_{K_\epsilon{}^c}(y)dy = 0$ et $\theta_{\epsilon|K} \equiv 1$.

3) On pose K et $\mathcal{O}$ comme définis dans l'énoncé. Il existe alors $0 < \epsilon_0 < 1$ tel que $K \subset K_{2\epsilon_0} \subset \mathcal{O}$. En effet, supposons que pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe $x_\epsilon \in K_{2\epsilon} \cap \mathcal{O}^c$. $K_{2\epsilon} \subset K_2$ qui est compact car fermé et borné. Il existe donc une sous-suite ψ telle que $(x_{\frac{1}{\psi(n)}})_n \in K_2^{\mathbb{N}}$, extraite de $(x_{\frac{1}{n}})_n$ qui converge vers $x_0 \in K_2$. Comme $d(x_{\frac{1}{\psi(n)}}, K) \leq \frac{2}{\psi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par continuité $d(x_0, K) = 0$. Or, $\mathcal{O}^c$ étant fermé, on a $x_0 \in \mathcal{O}^c$ donc $\mathcal{O}^c \cap K \neq \emptyset$ ce qui est absurde par hypothèse.

On pose alors $\varphi = \theta_{\epsilon_0}$. Par construction, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi_{|K} \equiv 1$ et $\varphi_{|K_{2\epsilon_0}^c} \equiv 0$. Or, $\mathcal{O}^c \subset K_{2\epsilon_0}^c$ donc φ convient. □

Leçons concernées :
207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

Références

[1] Claude Zuily. Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.