Génération des groupes $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$

24 avril 2013

Dans la suite, on pose $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

Théorème. *Tout $u \in \mathrm{O}(E)$ est le produit d'au plus r réflexions orthogonales où $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E)$. En particulier, les réflexions orthgonales engendrent $\mathrm{O}(E)$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E)$.

Si $r = 0$, $u = \mathrm{Id}_E$ et u est le produit de 0 réflexion.

On suppose $r > 0$ et le résultat vrai au rang $r - 1$: pour tout $v \in \mathrm{O}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(v - \mathrm{Id}_E) < r$, v est le produit d'au plus $\mathrm{rg}(v - \mathrm{Id}_E)$ réflexions. On sait que $u \neq \mathrm{Id}_E$ donc il existe $x \in E$ de norme 1 tel que $u(x) \neq x$. Comme $\|u(x)\| = \|x\| = 1$, on a $\langle u(x) - x, u(x) + x \rangle = \|u(x\|^2 - \|x\|^2 = 0$ et donc $u(x) - x \perp u(x) + x$. On pose $y = u(x) - x$, $H = \mathrm{Vect}(y)^{\perp}$ et s la réflexion orthogonale d'hyperplan H. En particulier, on a $s(u(x) + x) = u(x) + x$ et $s(u(x) - x) = x - u(x)$.

$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{Id}_E)$. En effet, soit $z \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$. Alors $u(z) = z$ et

$$\begin{array}{rcl} \langle z, u(x) - x \rangle & = & \langle z, u(x) \rangle - \langle z, x \rangle \\ & = & \langle u(z), u(x) \rangle - \langle z, x \rangle \\ & = & \langle z, x \rangle - \langle z, x \rangle \\ & = & 0 \end{array}$$

car u est une isométrie ($u \in \mathrm{O}(E)$). Donc $z \in H$ d'où $z = s(z) = s(u(z))$ et $z \in \mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{Id}_E)$. De plus, cette inclusion est stricte car $x \in \mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{Id}_E) \setminus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$. Effectivement,

$$\begin{array}{rcl} s(u(x)) & = & \frac{1}{2} s(2.u(x)) = \frac{1}{2} s(u(x) - x + u(x) + x) \\ & = & \frac{1}{2} \cdot s(u(x) - x) + \frac{1}{2} \cdot s(u(x) + x) \\ & = & \frac{1}{2} \cdot (x - u(x)) + \frac{1}{2} \cdot (u(x) + x) \\ & = & x \end{array}$$

mais $x \notin \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ par hypothèse. Ainsi, $\mathrm{rg}(s \circ u - \mathrm{Id}_E) = n - \dim(\mathrm{Ker}(s \circ u - \mathrm{Id}_E)) < n - \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = r$ donc, par hypothèse de récurrence, $s \circ u$

est le produit d'au plus $r-1$ réflexions orthogonales, c'est à dire qu'il existe $p \leq r-1$ et $s_1, \ldots, s_p$ des réflexions orthogonales telles que $s_1 \circ \cdots \circ s_p = s \circ u$ d'où $s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_p = u$ car $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et u est le produit d'au plus r réflexions orthogonales. $\square$

Proposition. *On suppose $n = 3$. Tout élément $u \in S\mathrm{O}(E)$ est le produit de deux renversements.*

Démonstration. Soit u une rotation de $S\mathrm{O}(E)$ distincte de l'identité. $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ est une droite de E donc $\mathrm{rg}(u-\mathrm{Id}_E) = 2$. D'après le théorème précédent, il existe s_1,s_2 telles que $u = s_1 s_2$. En effet $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $\det u = 1 \neq -1$ donc u n'est pas le produit d'une seule réflexion orthogonale. Or si H_i est le plan associé à s_i, $-s_i$ est le renversement par rapport à la droite $H_i^{\perp}$. Donc $u = (-s_1) \circ (-s_2)$ est la produit de deux renversements. $\square$

Lemme. *Soit $n \geq 3$ et soient s_1, s_2 deux réflexions orthogonales. Il existe deux renversements σ_1, σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.*

Démonstration. On pose $u = \tau_1 \tau_2$. Soient H_1 et H_2 les hyperplans de τ_1 et τ_2 et soit V un sous-espace de dimension $n-3$ de $H_1 \cap H_2$ (de dimension $n-2$). On a $u_{|V} = \mathrm{Id}_{|V}$ et donc $u(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$. En effet, soient $y \in V^{\perp}$ et $x \in V$, $\langle u(y), x \rangle = \langle u(y), u(x) \rangle = \langle y, x \rangle = 0$. D'après la proposion précédente, on a $u_{|V^{\perp}} = \sigma_1 \sigma_2$ avec σ_1 et σ_2 des renversements de $V^{\perp}$. On obtient le résultat en prolongeant les σ_i par l'identité sur V. $\square$

Théorème. *On suppose $n \geq 3$. Tout élément $u \in \mathrm{SO}(E)$ est le produit d'au plus n renversements. En particulier, les renversements engendrent* $\mathrm{SO}(E)$*.*

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{SO}(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$. D'après le théorème précédent, il existe $p \geq 1$ et $(s_i)_{i \in \{1, \ldots, 2p\}}$ tels que $u = s_1 \circ \cdots \circ s_{2p}$. En effet, $\det u = 1$ donc u est nécessairement le produit d'un nombre pair de réflexions orthogonales. D'après le lemme précédent, il existe donc $(\sigma_i)_{i \in \{1, \ldots, 2p\}}$ des renversements tels que $s_i s_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1}$ pour tout $i \in 2\{1, \ldots, p\}$ et $u = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{2p}$. $\square$

Leçons concernées :

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de GL(E). Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

183 Utilisation des groupes en géométrie.

Références

[1] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas. Oraux X-ENS, Algèbre 3. Cassini. Exercice 1.33.

[2] Daniel Perrin. Cours d'algèbre. Ellipses. Théorèmes VI.2.4 et VI.2.6.