Groupes d'ordre 12

3 janvier 2013

Lemme. *Soit G un groupe d'ordre 12. Alors, G n'est pas simple.*

Démonstration. Par le théorème de Sylow, G possède un 2-Sylow et un 3-Sylow et de plus, $N_3 \equiv 1[3]$, $N_3 \mid 4$, $N_2 \equiv [2]$ et $N_2 \mid 3$. Donc $N_3 \in \{1, 4\}$ et $N_2 \in \{1, 3\}$. Par le théorème de Sylow, tous les 2-Sylows sont conjugués et tous les 3-Sylows sont conjugués donc G est simple $\Rightarrow N_3 = 4$ et $N_2 = 3$. Supposons que $N_3 = 4$. On note K_1, K_2, K_3, K_4 les 4 3-Sylows. Comme ce sont des groupes d'ordre 3, ils sont monogènes donc $K_i \cap K_j = \{1_G\} \Leftrightarrow i \neq j$. Si on note H un 2-Sylow, $K_i \cap H = \{1_G\}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ car H ne contient aucun élément d'ordre 3. Ainsi, il ne peut y avoir qu'un 2-Sylow car il ne reste que 3 éléments non neutres de G qui n'appartiennent à aucun 3-Sylow. Ainsi $N_3 = 4 \Rightarrow N_2 = 1$ donc G n'est pas simple. □

Théorème. *Il n'existe (à isomorphisme près) que 5 groupes d'ordre 12 :*

1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

2) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

3) A_4

4) $\langle x, y \mid x^4 = y^3 = 1_G, xyx^{-1} = y^2 \rangle$

5) D_6

Démonstration. Soit G un groupe d'ordre 12. Traitons dans un premier temps le cas où G est un groupe abélien. Par le théorème de Kroenecker, on obtient $G \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Supposons à présent que G n'est pas abélien. Par le théorème de Sylow et le lemme précédent, on peut distinguer 3 cas : le cas où $N_3 = 1$ et $N_2 = 1$, le cas où $N_3 = 4$ et $N_2 = 1$ et le cas où $N_3 = 1$ et $N_2 = 3$.

Cas 1 : On suppose $N_3 = 1$ et $N_2 = 1$. Par la propriété du produit semi-direct d'un groupe fini, on a $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ce qui est absurde car G n'est pas abélien.

Cas 2 : On suppose $N_3 = 4$ et $N_2 = 1$. On note K_1, K_2, K_3, K_4 les 4 3-Sylows. D'après le théorème de Sylow, tous les 3-Sylows sont conjugués donc l'application

$$\begin{array}{rcl} G \times \{K_1, K_2, K_3, K_4\} & \to & \{K_1, K_2, K_3, K_4\} \\ (g, K_i) & \mapsto & gK_ig^{-1} \end{array}$$

est bien définie et définit une action de groupe. Pour tout $g \in G$, on note $\sigma_g \in S_4$ la permutation définie par $gK_ig^{-1} = K_{\sigma_g(i)}$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : G & \to & S_4 \\ g & \mapsto & \sigma_g \end{array}$$

est un morphisme de groupe. En effet, pour tout $g, h \in G$, $ghK_ih^{-1}g^{-1} = gK_{\sigma_h(i)}g^{-1} = K_{\sigma_g \circ \sigma_h(i)}$ et $h^{-1}K_ih = K_{\sigma_h^{-1}(i)}$. Montrons que $\mathrm{Ker}\phi = \{1_G\}$ et $\mathrm{Im}\phi = A_4$. On pourra d'après le théorème d'isomoprhisme conclure que $G \simeq A_4$.

Par la formule des action de groupes, on a $12 =\mid G \mid = |\mathrm{Stab}_G(K_i)| \cdot \mathrm{card} o(K_i)$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$. Or d'après l théorème de Sylow $\mathrm{card}\, o(K_i) = 4$. Donc $|\mathrm{Stab}_G(K_i)| = 3$ pour tout i. Et comme $K_i \subset \mathrm{Stab}_G(K_i)$ car K_i est un groupe, on a $K_i = \mathrm{Stab}_G(K_i)$. Or, $\mathrm{Ker}\phi = \cap_{i=1}^4 \mathrm{Stab}_G(K_i) = \cap_{i=1}^4 K_i = \{1_G\}$ pour la même raison que celle proposée dans le lemme.

En reprenant la démonstration du lemme, on remarque que G possède exactement 8 éléments d'ordre 3, notés $(k_i)_{1 \le i \le 8}$. Comme l'ordre de $\langle k_i \mid 1 \le i \le 8 \rangle$ est supérieur ou égal à 8 et divise 12, on sait que $(k_i)_{1 \le i \le 8}$ engendre G. Or tous les k_i sont d'ordre 3 dans G donc les $\phi(k_i)$ sont d'ordre 3 dans S_4 ce qui veut dire que $\phi(k_i) \in A_4$ pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$ et donc que $\mathrm{Im}\phi \subset A_4$. Or $|\mathrm{Im}\phi| = |G/\mathrm{Ker}\phi| = |G| = 12 = |A_4|$ donc $\mathrm{Im}\phi = A_4$ ce qui conclut la démonstration.

Cas 3 : On suppose $N_3 = 1$ et $N_2 = 4$. On note K l'unique 3-Sylow de G et H un 2-Sylow de G. Par la propriété du porduit semi-direct, on $G \simeq K \rtimes H$. K est d'ordre 3 donc $K \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. H est d'ordre 4 donc $H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ou $H \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Cas 3.1 : Si $H \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. On note $y \in K$ et $x \in H$ deux éléments d'ordre respectif 3 et 4. x et y ne comuttent pas sinon, on aurait $K \rtimes H \simeq K \times H$ et alors G serait abélien. Ainsi $xyx^{-1} \neq y$ mais $xyx^{-1} \in K$ car $K \lhd G$ donc $xyx^{-1} = y^2$ et $G \simeq \langle x, y \mid x^4 = y^3 = 1_G, xyx^{-1} = y^2 \rangle$.

Cas 3.2 : Si $H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Montrons qu'alors $D_6 \simeq G$. On sait que D_6 est d'ordre 12 et n'est pas commutatif. De plus, D_6 possède un élément d'ordre 6 donc D_6 n'est pas isomorphe à A_4. Il ne possède pas d'élément d'ordre 4 donc n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Conclusion : D_6 est nécessairement isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ d'après ce qui précède. $\square$

Références

[1] Michael Artin. Algebra. Prentice Hall. 1991. p.209