Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

29 mai 2013

Lemme. *Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-\epsilon t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$*

Démonstration. On utilise le théorème de dérivation sous le signe somme :
$\left|e^{-itx}e^{-\epsilon t^2}\right| = e^{-\epsilon t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $I(x)$ existe.

On pose $\varphi(x,t) = e^{-itx}e^{-\epsilon t^2}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. $x \mapsto \varphi(x,t)$ est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-ite^{-itx}e^{-\epsilon t^2}\right| = |t|\, e^{-\epsilon t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et indépendnat de x donc par le théorème de dérivation,

$$\begin{aligned} I'(x) &= \int_{\mathbb{R}} -it.e^{-itx}.e^{-\epsilon t^2}dt \\ &= \frac{i}{2\epsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}(-2\epsilon t)e^{-\epsilon t^2}dt \\ &= \frac{i}{2\epsilon}\left[e^{-itx}e^{-\epsilon t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{i}{2\epsilon}\int_{\mathbb{R}} -ixe^{-itx}e^{-\epsilon t^2}dt \\ &= 0 - \frac{x}{2\epsilon}I(x) \end{aligned}$$

donc $I(x) = I(0)e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$ d'après le calcul de l'ntégral de Gauß (admis) $\square$

Théorème. *La transformation de Fourier est une application linéaire bijective de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$ d'inverse $\overline{\mathcal{F}}f : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}f(t)dt$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ envoient $S(\mathbb{R})$ sur $S(\mathbb{R})$. Comme$\overline{\mathcal{F}}f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}f(-x)$, il suffit de le faire pour $\mathcal{F}$. Le théorème de dérivation sous le signe somme nous donne $\mathcal{F}f \in C^\infty$ si $f \in S(\mathbb{R})$. En effet, la fonction $\varphi : (x,t) \mapsto e^{-itx}f(t)$ est infiniment dérivable par rapport à x et $\left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|e^{-itx}(-it)^k f(t)\right| = \left|t^k f(t)\right| \in L^1$ et indépendant de x donc on obtient $\mathcal{F}f \in C^\infty$ et,

$$(\mathcal{F}f)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}(-it)^k f(t)dt$$

Par intégrations par partie successives, on obtient

$$\begin{aligned} x^l(\mathcal{F}f)^{(k)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left((-D_t)^l\, e^{-itx}\right)\left((-it)^k f(t)\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}D_t^l\left((-it)^k f(t)\right)dt \end{aligned}$$

d'où $\left|x^l(\mathcal{F}f)^{(k)}(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|D_t^l\left(t^k f(t)\right)\right|dt < +\infty$ car $D_t^l(t^k f(t)) = \sum_{j=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} D_t^j(t^k)D_t^{l-j}(f(t))$ donc

$$\left|x^l(\mathcal{F}f)^{(k)}(x)\right| \leq \sum_{j=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} \left|D_t^j(t^k)D_t^{l-j}(f(t))\right|dt < +\infty$$

car $S(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme et par dérivation. Ceci prouve que $\mathcal{F}f \in S(\mathbb{R})$ et donc que $\overline{\mathcal{F}}f \in S(\mathbb{R})$. Le fait que $\mathcal{F}$ est linéaire est immédiat.

Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\hat{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\epsilon t^2}\hat{f}(t)dt$$

En effet, si on note $f_\epsilon(t) = e^{itx}e^{-\epsilon t^2}\hat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $|f_\epsilon(t)| \leq \left|\hat{f}(t)\right|$ et $\hat{f} \in L^1$ et indépendant de ϵ, donc le membre de droite est bien défini. De plus, $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t) = e^{itx}\hat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème de convergence dominée, on a le résultat annoncé. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\epsilon t^2}\hat{f}(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx-\epsilon t^2}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-ity}dy\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it(y-x)}e^{-\epsilon t^2}dt\right)dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4\epsilon}}dy\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent et le théorème de Fubini. En effet, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est σ-finie et d'après Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\left|e^{it(x-y)}e^{-\epsilon t^2}f(y)\right|dydt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2}dt\int_{\mathbb{R}}|f(y)|\,dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\,\|f\|_1 < +\infty\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème de Fubini-Lebesgue, on peut intervertir les intégrales.

On pose le changement de variables $y - x = 2\sqrt{\epsilon}u$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx-\epsilon t^2}\hat{f}(t)dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}f(x+2\sqrt{\epsilon}u)du \\ &\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}f(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du \\ &= f(x)\end{aligned}$$

En effet, $e^{-u^2}f(x+2\sqrt{\epsilon}u) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} f(x)e^{-u^2}$ et $\left|e^{-u^2}f(x+2\sqrt{\epsilon}u)\right| \leq C_{0,0}\cdot e^{-u^2}$ (car $f \in S(\mathbb{R})$) qui est intégrable et indépendant de ϵ donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et le résultat suit. $\square$

Leçons concernées :

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.

247 Exemples de problèmes d'interversion de limites.

254 Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$.

255 Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

Références

[1] Hervé Queffélec, Claude Zuily. Eléments d'analyse. Dunod.

[2] Claude Zuily. Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Dunod.