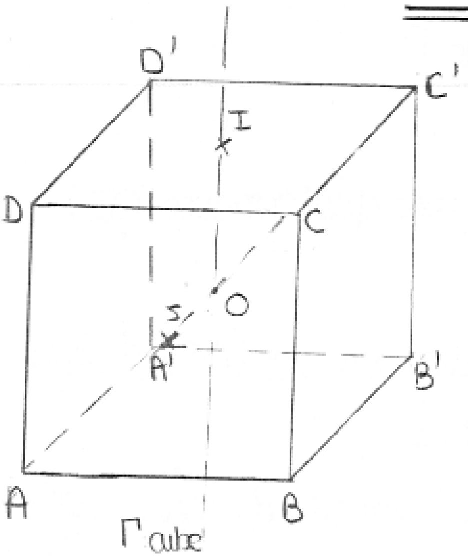
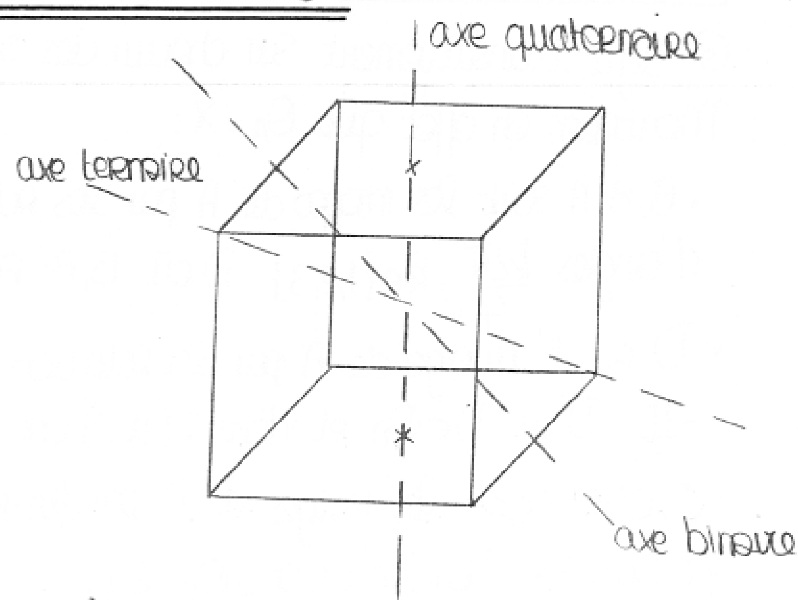
DVP 2

Isométries du cube





<u>Notations</u> : $G = \{ f \in Is(\mathcal{E}_3),\ f(\Gamma) = \Gamma \}$

$G^+ = \{ f \in Is^+(\mathcal{E}_3),\ f(\Gamma) = \Gamma \}$

<u>Théorème</u> : Le groupe G des isométries du cube comporte 48 éléments : 24 isométries directes et 24 indirectes.

<u>Idée démo</u> : Montrons que $|G^+| = 24$:

i) stabilisateur d'un sommet (noté $Stab_{G^+}(x)$)

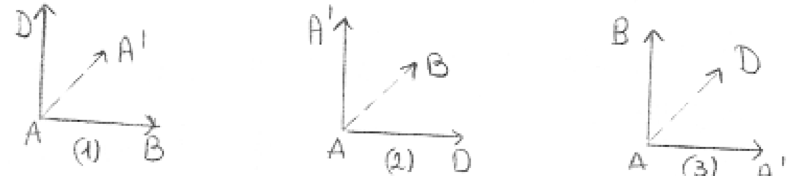
ii) orbite d'un sommet (noté $\mathcal{O}_x$)

<u>Démo</u> : Le groupe recherché est l'ensemble des isométries directes conservant les 8 sommets. On note $X = \{8 \text{ sommets}\}$

G^+ agit sur X donc $\forall x \in X \quad |G^+| = |\mathcal{O}_x| \cdot |Stab_{G^+}(x)|$

i) <u>Stabilisateur d'un sommet</u> :

Si f stabilise A alors le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AA'}, \vec{AD})$ a pour image un autre repère, de même sens que $\mathcal{R}$, issu de A, inclus dans Γ. Les images de $\mathcal{R}$ possibles sont :



Réciproquement un tel repère est l'image de $\mathcal{R}$ par une isométrie f unique.
Ainsi $Stab_{G^+}(A)$ est d'ordre 3 et ses éléments sont :

- l'identité (1)
- la rotation d'axe (AC') d'angle $\frac{2\pi}{3}$ (2) $(\in G^+)$
- la rotation d'axe (AC') d'angle $\frac{4\pi}{3}$ (3) $(\in G^+)$

Théorème Le groupe G^+ est isomorphe au groupe symétrique des permutations induites sur l'ensemble des 4 grandes diagonales : $\{(AC'), (BD'), (CA'), (DB')\}$. Ainsi $G^+ \cong \mathfrak{S}_4$ et $G \cong \mathfrak{S}_4 \times \{Id, S_0\}$ (où S_0 symétrie centrale du cube)

Idée de la démo : • Considérer le morphisme $\mu : G^+ \longrightarrow \mathfrak{S}_4$
• mq toute transposition $\in \mu(G^+)$ pour avoir la surjectivité

Démo : . Soit D l'ensemble des 4 grandes diagonales : $D = \{(AC'), (BD'), (CA'), (DB')\}$
Toute isométrie du cube transforme une grande diagonale en une grande diagonale et induit donc une permutation de D. Il en résulte un morphisme $\mu : G^+ \longrightarrow \mathfrak{S}(D) = \mathfrak{S}_4$.
Montrons que c'est un isomorphisme :
• $|G^+| = |\mathfrak{S}_4| = 24$
• Reste à voir la surjectivité, or $\mathfrak{S}_4$ est engendré par les transpositions, montrons donc que toute transposition est dans $\mu(G^+)$
– La transposition $((AC')(BD'))$ est réalisée par le retournement d'axe binaire passant par le milieu de $[AB]$
– La transposition $((AC')(CA'))$ est réalisée par le retournement d'axe binaire passant au milieu de $[AA']$
– idem pour les autres
Ainsi $\mu(G^+)$ contient toutes les transpositions et donc contient le sous groupe engendré ie $\mathfrak{S}_4$.
Conclusion μ est un isomorphisme et $G^+ \cong \mathfrak{S}_4$

. En composant tous les éléments de G^+ avec S_0 on obtient G^-
Comme S_0 permute avec toutes les rotations du cube (vu que l'axe de chacune passe par O) l'application
$$\begin{aligned} G^+ \times \{id, S_0\} &\longrightarrow G \\ (f, g) &\longrightarrow f \circ g \end{aligned}$$
est un morphisme surjectif de groupe. On a de plus l'égalité des cardinaux
Conclusion $G \cong \mathfrak{S}_4 \times \{Id, S_0\}$.

ii) Orbite d'un sommet :

G^+ agit transitivement sur chacun des sommets de Γ.

Montrons en effet que $\mathcal{O}_A = X$:

- B, B', A sont les images de A par les rotations d'axe quaternaire (OI) d'angles $\frac{k2\pi}{4}$, $k \in \{1,2,3\}$ D'où $B, B', A' \in \mathcal{O}_A$
- D est l'image de A par la rotation d'axe quaternaire (OS) d'angle $-\frac{\pi}{2}$. D'où $D \in \mathcal{O}_A$ et donc D et A ont même orbite
- C, C', D' sont les images de D par les rotations d'axe (OI) d'angles $\frac{k2\pi}{4}$ $k \in \{1,2,3\}$. Donc $C, C', D' \in \mathcal{O}_D = \mathcal{O}_A$

Conclusion $\mathcal{O}_A = X$ et $|\mathcal{O}_A| = 8$

Conclusion G^+ est fini d'ordre : $|G^+| = |\mathcal{O}_A| \cdot |Stab_{G^+} A| = 3 \times 8 = 24$

G comprend donc 24 déplacements mais aussi 24 antidéplacements (obtenus en composant une réflexion du groupe avec chacun des 24 déplacements)

Conclusion $|G| = 48$

<u>Pour résumer</u> : Les 24 isométries directes du cube sont les 24 rotations suivantes :

- l'identité
- les 3 retournements et les 6 rotations d'angles $\pm \pi/2$ autour des 3 axes quaternaires
- les 6 retournements autour des 6 axes binaires
- les 8 rotations d'angles $\pm 2\pi/3$ autour des 4 axes ternaires

Les 24 isométries indirectes du cube sont :

- la symétrie de centre O
- les 3 réflexions selon les plans médiateurs d'arêtes
- les 6 réflexions selon les 6 plans déterminés par deux arêtes opposées
- les 6 antirotations de centre O, d'axes les 3 axes quaternaires et d'angles $\pm \pi/2$ (composée de la rotation et de la sym centrale de centre O)
- les 8 antirotations de centre O, d'axes les 4 axes ternaires et d'angles $\pm \pi/3$.

Bibliographie :
- Yves Ladegaillerie
  Géométrie
- Dany-Jack Mercier
  Cours de géométrie
- Michèle Audin
  Géométrie