LEÇON 118 = EXEMPLES D'UTILISATION DE LA NOTION DE DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

**

Griffone

DEVELOPPEMENT = REDUCTION DE JORDAN

Théorème de Jordan = Soit f un endomorphisme de E (E K-ev de dim n).
On suppose que f possède une unique valeur propre λ et que
$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n$ $\mu_f(X) = (X-\lambda)^\beta$ et $\dim E_\lambda = \gamma$.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_\gamma(\lambda) \end{pmatrix} = \tilde{J}(\lambda)$
où $\underbrace{J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}}_{\text{bloc de Jordan}}$ et où l'ordre du plus grand bloc de Jordan est β.

Rmq = Si f possède $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ comme valeurs propres de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} \underbrace{\tilde{J}(\lambda_1)}_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\tilde{J}(\lambda_p)}_{\alpha_p} \end{pmatrix}$.

En effet, comme $\chi_f(X) = \prod_{j=1}^{p} (X-\lambda_j)^{\alpha_j}$ on a $E = \bigoplus_{j=1}^{p} \ker(f - \lambda_j \mathrm{id})^{\alpha_j}$
donc E est somme de sous-espaces caractéristiques donc on applique le résultat précédent à chaque sous-espace.

Démonstration (thm) = On suppose $\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n$.
Comme χ_f est scindé f est trigonalisable sur K donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} = A$.
On a $A = \lambda I + N$ où N est une matrice nilpotente.
Comme la matrice λI de $\lambda \mathrm{id}$ est la même en toute base le problème revient à étudier la réduction des endomorphismes nilpotents.

→ REDUCTION DES ENDOMORPHISMES NILPOTENTS.

Lemme = Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $1 < \beta \leq n$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) $\beta = n$
ii) $\exists x \in E$ $x \neq 0$ tel que $\{u^{n-1}(x), \dots, u(x), x\}$ est une base de E (u est dit cyclique)
iii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Démo (lemme) = ii) $\Leftrightarrow$ iii) $\mathcal{B} = \{u^{n-1}(x), \dots, u(x), x\}$

iii) $\Rightarrow$ i) On a $\mu_u(X) = X^n$ donc $\beta = n$

i) $\Rightarrow$ ii) Comme $u^{n-1} \neq 0$ il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.
La famille $(u^{n-1}(x), \dots, u(x), x)$ est libre =
Si il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x) = 0$ alors en prenant l'image de ce vecteur par u^{n-1} on montre que $\lambda_0 = 0$, puis l'image par u^{n-2} on montre que $\lambda_1 = 0$, e.t.c.

On a donc une base de E puisque c'est une famille de n éléments.
On a de plus $\mathrm{mat}_{(u^{n-1}(x),\dots,u(x),x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Thm = Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $1 < \beta \leq n$.
Alors E est somme directe de sous-espaces stables par u tels que la restriction de u à ces sous-espaces stables est un endomorphisme cyclique.

Lemme = On note $K_p = \ker(u^p)$. Alors on a $\{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_\beta = E$.

Démo = Soit $x \in K_p$, on a $u^p(x) = 0$ donc $u^{p+1}(x) = 0$ donc $x \in K_{p+1}$ donc $K_p \subset K_{p+1}$.
s'il existait $p \in \{1, \dots, \beta-1\}$ tel que $K_p = K_{p+1}$ on aurait
$K_p = K_{p+1} = \dots = K_\beta = E$ donc p serait l'indice de u. □
$x \in K^{p+2} \Rightarrow u^{p+2}x = 0 \Rightarrow u^{p+1}ux = 0 \Longleftrightarrow u^{p}ux = 0 \Longleftrightarrow x \in K^{p+1}$

Ainsi, pour tout $p \in \{1, \dots, \beta-1\}$ il existe un ss-espace $M_p \neq \{0\}$ tel que $K_p = K_{p-1} \oplus M_p$.

Lemme = Il existe des sous-espaces $M_1, \dots, M_\beta$ non réduits à $\{0\}$ tels que :
1) $K_p = K_{p-1} \oplus M_p$ $\quad p \in \{1, \dots, \beta\}$
2) $u(M_p) \subset M_{p-1}$ $\quad p \in \{2, \dots, \beta\}$.

Démo = (récurrence descendante sur p).
- Si $p = \beta$ on choisit pour M_β un supplémentaire quelconque de $K_{\beta-1}$ dans K_β.
- Supposons avoir construit les sous-espaces $M_\beta, M_{\beta-1}, \dots, M_p$ vérifiant 1) et 2).

On a $u(M_p) \subset K_{p-1}$: soit $x \in M_p$, comme $M_p \subset K_p$ on a $u^p(x) = 0$ donc $u^{p-1}(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in K_{p-1}$

On a $u(M_p) \cap K_{p-2} = \{0\}$: soit $y \in u(M_p) \cap K_{p-2}$ il existe $x \in M_p$ tel que $y = u(x)$ et $u^{p-2}(y) = 0$ donc $u^{p-1}(x) = 0$ donc $x \in K_{p-1}$ donc $x \in K_{p-1} \cap M_p = \{0\}$ donc $x = 0$ donc $y = 0$ donc $u(M_p) \cap K_{p-2} = \{0\}$.

Ainsi $u(M_p)$ et K_{p-2} sont en somme directe et $K_{p-2} \oplus u(M_p) \subset K_{p-1}$.
Notons G_{p-1} un supplémentaire de $K_{p-2} \oplus u(M_p)$ dans K_{p-1} :
on a $K_{p-1} = K_{p-2} \oplus u(M_p) \oplus G_{p-1}$. On pose $M_{p-1} = u(M_p) \oplus G_{p-1}$ alors M_{p-1} vérifie 1) et 2).

On a $E = M_1 \oplus \dots \oplus M_\beta$.
On va construire une base de E en choisissant une base de chaque M_i.

Lemme = L'image par u d'une base de M_p est une famille libre pour M_{p-1} ($p \geq 2$).

Démo = Soit $(v_1, \dots, v_r)$ une base de M_p. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u(v_i) = 0$.
On a donc $u(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = 0$ donc $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in \ker u = K_1 \subset K_{p-1}$
Donc $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in M_p \cap K_{p-1} = \{0\}$ donc puisque $v_1, \dots, v_r$ sont indépendants on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. □

Il reste à construire la base de E.

- Dans M_β, on choisit une base quelconque, notée C_β.
- Dans $M_{p-1} = u(M_p) \oplus C_{p-1}$ on construit une base en prenant l'image par u de la base construite sur M_p et on complète par une base quelconque de C_{p-1}.

On a ainsi les bases $\mathcal{B}_\beta, \dots, \mathcal{B}_1$ de $M_\beta, \dots, M_1$:

$$\mathcal{B}_\beta = \{ \overbrace{v_1, \dots, v_{n_\beta}}^{C_\beta} \}$$

$$\mathcal{B}_{\beta-1} = \{ u(v_1), \dots, u(v_{n_\beta}), \overbrace{w_1, \dots, w_{n_{\beta-1}}}^{C_{\beta-1}} \}$$

$$\mathcal{B}_{\beta-2} = \{ u^2(v_1), \dots, u^2(v_{n_\beta}), u(w_1), \dots, u(w_{n_{\beta-1}}), \underbrace{z_1, \dots, z_{n_{\beta-2}}}_{C_{\beta-2}} \}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}_1 = \{ u^{\beta-1}(v_1), \dots, u^{\beta-1}(v_{n_\beta}), u^{\beta-2}(w_1), \dots, u^{\beta-2}(w_{n_{\beta-1}}), \dots, \underbrace{x_1, \dots, x_{n_1}}_{C_1} \}$$

Si $k \in \{1, \dots, \beta\}$ on note, pour $x \in C_k$ $\quad I_k(x) = \mathrm{vect}\{(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))\}$.

Par exemple $I_\beta(v_1) = \{v_1, u(v_1), \dots, u^{\beta-1}(v_1)\}$.

Alors on a : - $\dim I_k(x) = k$

- $u_{|I_k(x)}$ est cyclique.
- $I_k(x)$ est stable par u.

E est somme directe de $I_\beta(v_1), \dots, I_\beta(v_{n_\beta}), \dots, \underbrace{I_1(x_1)}_{= \mathrm{vect}(x_1)} \dots \underbrace{I_1(x_{n_1})}_{= \mathrm{vect}(x_{n_1})}$ donc le théorème est démontré. $\square$