Réduction des endomorphismes normaux

Th. Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien $(E, <,>)$. Alors f est diagonalisable et les sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux. (En particulier, on peut construire une base orthonormée de vecteur propre en prenant une base orthonormée dans chaque espace propre)
Ou en terme de matrice: Soit A une matrice normale. Il existe alors une matrice unitaire U telle que la matrice $D = {}^t\bar{U} A U$ soit diagonale (non necessairement réelle)

preuve: Par recurrence sur $\dim E = n$.
Pour $n = 1$, le résultat est évident.
Supposons le théorème vrai à l'ordre $n-1$ et montrons qu'il est vrai à l'ordre n.
Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda = \ker(f - \lambda id)$ l'espace propre correspondant, on a
$E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$

Notons que $\dim E_\lambda^\perp \leq n-1$
On montre d'abord que $E_\lambda^\perp$ est stable par f, puis que la restriction de f à $E_\lambda^\perp$ est un endomorphisme normal de $E_\lambda^\perp$, et enfin on conclut.

a) $E_\lambda^\perp$ est stable par f:
Notons d'abord que E_λ est stable par f^*: En effet soit $x \in E_\lambda$. On a $f \circ f^*(x) = f^* \circ f(x)$ car f est normal
$= \lambda f^*(x)$
ce qui montre que $f^*(x) \in E_\lambda$

Soit maintenant $y \in E_\lambda^\perp$. On a pour tout $x \in E_\lambda$

$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f^*(x) \rangle$ définition de l'adjoint

$= 0$ car $y \in E_\lambda^\perp$ et $f^*(x) \in E_\lambda$

E_λ stable par f^*

ce qui veut dire que $f(y) \in E_\lambda^\perp$ et que donc $E_\lambda^\perp$ est stable par f.

b) La restriction de f à $E_\lambda^\perp$ est un endomorphisme normal

Comme E_λ est stable par f^*, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par f donc $f_{|E_\lambda^\perp}$ est un endomorphisme de $E_\lambda^\perp$

on aurait pu utiliser la même idée que précédemment c'à-d E_λ stable par $f \Rightarrow E_\lambda^\perp$ stable par f^* l'avantage on montre le th F stable par $f \Rightarrow F^\perp$ — f^*

Notons que $E_\lambda^\perp$ est stable par f^*. En effet soit $x \in E_\lambda^\perp$ pour tout $y \in E_\lambda$, on a

$\langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0$

ce qui montre que $f^*(x) \in E_\lambda^\perp$ et que donc $E_\lambda^\perp$ est stable par f^*

Comme f est normal ssi $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^*(x), f^*(y) \rangle$ pour tout $x, y \in E$

Notons $\langle , \rangle_{E_\lambda^\perp}$, le produit scalaire sur $E_\lambda^\perp$ induit par celui de E, $\langle , \rangle$.

Comme $E_\lambda^\perp$ est stable par f et f^* on a que pour tout $x, y \in E_\lambda^\perp$

$\langle f(x), f(y) \rangle_{E_\lambda^\perp} = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^*(x), f^*(y) \rangle = \langle f^*(x), f^*(y) \rangle_{E_\lambda^\perp}$

ce qui montre que la restriction de f à $E_\lambda^\perp$ est normale.

Le théorème se démontre maintenant facilement.

Comme $\dim E_\lambda \leq n-1$ et $\dim E_\lambda^\perp \leq n-1$, par hypothèse de récurrence on en déduit que $f_{|E_\lambda}$ et $\hat{f} = f_{|E_\lambda^\perp}$ sont diagonalisables. Donc f est diagonalisable.

De plus par hypothèse de récurrence $E_\lambda^\perp$ est somme directe de sous espace propre de $\tilde{f}$ qui sont deux à deux orthogonaux. Il en est de même pour $f_{|E_\lambda}$. Mais $f_{|E_\lambda}$ n'admet qu'une valeur propre donc un seul sous espace propre E_λ. Comme les sous espaces propres de $\hat{f}$ sont des sous espaces propres de f et par ailleurs, $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$, il est clair que E est somme directe de sous espaces propres deux à deux orthogonaux.
Le théorème est démontré

Référence

Joseph Grifone Algèbre linéaire p282

Leçon :