Théorème de Weyl-Minkovski sur les Polyèdres Compacts

24 avril 2013

Dans la suite, on se place dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel. Pour toute forme linéaire $f \in \left(\mathbb{R}^d\right)'$, il existe un unique $c \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(x) = \langle c, x\rangle$.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et $a \in A$. On dit que a est un point extrêmal de A si et seulement si pour tout $b, c \in A$ tels que $\frac{b+c}{2} = a$, alors $a = b = c$.

On admet les théorèmes suivants :

Théorème 1. *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un convexe compact. Alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrêmaux.*

et

Théorème 2. *Hahn-Banach : Soient $A, B \subset \mathbb{R}^d$ deux convexes fermés tel que $A \cap B = \emptyset$. Alors il existe $f \in \left(\mathbb{R}^d\right)'$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < c\}$ et $B \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > c\}$.*

Définition. Soit $m \geq 1$. On appelle polyèdre un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f_i(x) \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}\}$ où $(f_i)_i \in \left(\left(\mathbb{R}^d\right)'\right)^m$ et $(\beta_i)_i \in \mathbb{R}^m$ ou de manière équivalente un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle c_i, x\rangle \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}\}$ avec $(c_i)_i \in \left(\mathbb{R}^d\right)^m$. On appelle sommet du polyèdre un point extrêmal du polyèdre.

On cherche à démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Weyl-Minkovski : Soit $P \subset \mathbb{R}^d$. P est un polyèdre compact si et seulement si P est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

On commence par démontrer la condition nécessaire :

Théorème. *Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f_i(x) \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}\}$ avec $(f_i)_i \in \left(\left(\mathbb{R}^d\right)'\right)^m$ et $(\beta_i)_i \in \mathbb{R}^m$. Pour $u \in P$, on pose $I(u) = \{i \mid f_i(x) = \beta_i\}$. Alors u est un sommet de P si et seulement si $\{f_i \mid i \in I(u)\}$ engendre $\left(\mathbb{R}^d\right)'$.*

Démonstration. Supposons que $\{f_i \mid i \in I(u)\}$ n'engendre pas $\left(\mathbb{R}^d\right)'$. Alors, il existe $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $f_i(y) = 0$ pour tout $i \in I(u)$. On sait que $f_i(u) < \beta_i$ pour tout $i \notin I(u)$. On pose $\delta = \min\{\beta_i - f_i(u) \mid i \notin I(u)\}$. Comme $y \neq 0$, il existe $i \notin I(u)$ tel que $f_i(y) \neq 0$. On pose $d = \max\{|f_i(y)| \mid i \notin I(u)\} > 0$. Soit $\epsilon = \frac{\delta}{d} > 0$, on pose $u_+ = u + \epsilon y$, $u_- = u - \epsilon y$ de sorte que $u = \frac{u_+ + u_-}{2}$. Pour tout $i \in I(u)$, $f_i(u_+) = f_i(u_-) = f_i(u) = \beta_i$. Pour tout $i \notin I(u)$, on a en revanche :

Si $f_i(y) = 0$: $f_i(u_+) = f_i(u_-) = f_i(u) = \beta_i \leq \beta_i$

Si $f_i(y) > 0$:

$f_i(u_+) = f_i(u) + \epsilon.f_i(y) < f_i(u) + \frac{\beta_i - f_i(u)}{|f_i(y)|}.f_i(y) = f_i(u) + \beta_i - f_i(u) = \beta_i$

$f_i(u_-) = f_i(u) - \epsilon.f_i(y) < f_i(u) < \beta_i$

Si $f_i(y) < 0$:

$f_i(u_+) = f_i(u) + \epsilon.f_i(y) < f_i(u) < \beta_i$

$f_i(u_-) = f_i(u) - \epsilon.f_i(y) < f_i(u) - \frac{\beta_i - f_i(u)}{|f_i(y)|}.f_i(y) = f_i(u) + \beta_i - f_i(u) = \beta_i$

donc u_+ et u_- appartiennent à P ce qui indique que u n'est pas un point extrêmal.

Supposons que $\{f_i \mid i \in I(u)\}$ engendre $\left(\mathbb{R}^d\right)'$. Soient $v, w \in P$ tels que $u = \frac{v+w}{2}$. On a $f_i(v) \leq \beta_i$ et $f_i(v) \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Par ailleurs, on a pour tout $i \in I(u)$, $f_i(v) = f_i(w) = \beta_i$. Mais comme $\{f_i \mid i \in I(u)\}$ engendre $\left(\mathbb{R}^d\right)'$. En particulier, $\mathrm{card}\{f_i \mid i \in I(u)\} \geq d$ donc ce système d'équations admet au plus une solution. Comme u est une solution, on obtient $v = w = u$ et donc u est un point extrêmal. □

Corollaire. *Un polyèdre compact est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

Démonstration. D'après le théorème 1, P est l'enveloppe convexe de ses sommets. En particulier, $m \geq d$ car sinon, P ne possèderait aucun sommet.

D'après le théorème, chaque sommet de P est solution d'un système $f_i(u) \leq \beta_i$, $i \in I(u)$ tel que $I(u)$ engendre $\left(\mathbb{R}^d\right)'$. Chacun de ces systèmes a au plus une solution. Ainsi, le nombre de sommets (définis par un ensemble de m inégalités) ne peut excéder $\begin{pmatrix} m \\ d \end{pmatrix}$. Donc on obtient le résultat. □

On démontre à présent la condition nécessaire du théorème.

Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie non vide. On appelle $A^\circ = \left\{c \in \mathbb{R}^d \mid \langle c, x\rangle \leq 1 \text{ pour tout } x \in A\right\}$ la partie polaire de A.

Proposition. $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$

Démonstration. Soit $b \in B^\circ$, alors pour tout $a \in A \subset B$, $\langle a, b\rangle \leq 1$ donc $b \in A^\circ$ □

Proposition. *Soit* $\lambda > 0$. *Alors* $\overline{B(0,\lambda)}^\circ = \overline{B(0, \frac{1}{\lambda})}$

Démonstration. Soit $x \in \overline{B(0, \frac{1}{\lambda})}$ et $y \in \overline{B(0,\lambda)}$. Par Cauchy-Schwarz, $\langle x, y\rangle \leq \|x\| \, \|y\| \leq \frac{\lambda}{\lambda} = 1$ donc $x \in \overline{B(0,\lambda)}^\circ$.

Soit $x \in \overline{B(0,\lambda)}^{\circ}$. Si $x = 0$, $x \in B(0, \frac{1}{\lambda})$ triviallement. Sinon, $\lambda.\frac{x}{\|x\|} \in B(0,\lambda)$ donc $\langle x, \lambda.\frac{x}{\|x\|}\rangle \leq 1$ donc $\|x\| = \frac{\langle x,x\rangle}{\|x\|} \leq \frac{1}{\lambda}$. □

Théorème. *Théorème bipolaire. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un convexe fermé qui contient 0. Alors $A = (A^\circ)^\circ$*

Démonstration. "$\subset$" Soit $a \in A$. Pour tout $c \in A^\circ$, $\langle c, a\rangle \leq 1$ donc $a \in (A^\circ)^\circ$.

"$\supset$" Supposons $(A^\circ)^\circ \setminus A \neq \emptyset$. Soit $u \in (A^\circ)^\circ \setminus A$. Comme A est un convexe fermé, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan affine qui sépare $\{u\}$ et A. En d'autres termes, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\langle c, u\rangle > \alpha$ et $\langle c, x\rangle < \alpha$ pour tout $x \in A$. Comme $0 \in A$, on a $\alpha > 0$. On pose $b = \alpha^{-1}c$. On a $\langle b, x\rangle < 1$ pour tout $x \in A$ donc $b \in A^\circ$. Or, $\langle b, u\rangle > 1$ ce qui contredit le fait que $u \in (A^\circ)^\circ$. On a donc $(A^\circ)^\circ$. □

Corollaire. *Soient $v_1, \ldots, v_m$ des points de $\mathbb{R}^d$. Alors $P = \mathrm{conv}(v_1, \ldots, v_m)$ est un polyèdre compact.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $\mathrm{int}P \neq \emptyset$ (sinon on se place dans le sous-espace affine engendré par $v_1, \ldots, v_m$) et que $0 \in \mathrm{int}\emptyset$ (sinon on translate P). Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B(0,\epsilon)} \subset P$. Ainsi, $P^\circ \subset \overline{B(0,\epsilon)}^{\circ} = \overline{B(0, \frac{1}{\epsilon})}$. Donc P° est borné. Or, $P^\circ = \left\{c \in \mathbb{R}^d \mid \langle c, v_i\rangle \leq 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, m\}\right\}$. En effet, si $x \in P^\circ$, $\langle x, v_i\rangle \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ car $v_i \in P$. Soit $x \in \left\{c \in \mathbb{R}^d \mid \langle c, v_i\rangle \leq 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, m\}\right\}$ et $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in P$ avec $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$. Alors, $\langle x, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m\rangle = \lambda_1\langle x, v_1\rangle + \ldots + \lambda_m\langle x, v_m\rangle \leq \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ donc $x \in P^\circ$.

Ainsi, P° est polyèdre fermé borné donc compact. D'après le résultat précédent, il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $P^\circ = \mathrm{conv}(u_1, \ldots, u_n)$. D'après le théorème bipolaire, on obtient de la même manière :

$$P = (P^\circ)^\circ = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u_i\rangle \leq 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}\right\}$$

donc P est un polyèdre compact. □

Leçons concernées :

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

Références

[1] Alexander Barvinok. A Course In Convexity. American Mathematical society. Corollaire II.4.4 Théorème IV.1.2 et corollaire IV.1.3