Théorème de projection dans un Hilbert

6 mai 2013

Théorème. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$\|x-u\| = \min\{\|x-v\| \mid v \in K\} \tag{1}$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \text{ et } \langle x-u, v-u\rangle \leq 0 \text{ pour tout } v \in K \tag{2}$$

On note $u = P_K(x)$ et on l'appelle projection de x sur K.

Démonstration. 1) Existence : Soit $(v_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\|x - v_n\| \to \min\{\|x-v\| \mid v \in K\}$. Alors, $(v_n)_n$ est de Cauchy. En effet, en appliquant l'identité du parallélogramme à $x - v_n$ et $x - v_m$ on a

$$\left\|x - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-v_n\|^2 + \|x-v_m\|^2\right)$$

Or, $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$ donc $\left\|x - \frac{v_n+v_m}{2}\right\| \geq \min\{\|x-v\| \mid v \in K\}$. Par conséquent, $\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|v_n-x\|^2 + \|v_m-x\|^2\right) - \min\{\|x-v\| \mid v \in K\} \to 0$ quand $n, m \to +\infty$. Il existe donc $u \in K$ tel que $\min\{\|x-v\| \mid v \in K\} = \|x-u\|$.

2) Caractérisation de u. Soit u vérifiant (1) et $w \in K$. On a $v = (1-t)u + tw \in K$ pour tout $t \in]0,1]$ et donc $\|x-u\| \leq \|x-(1-t)u-tw\| = \|(x-u)-t(w-u)\|$ d'où

$$\|x-u\|^2 \leq \|x-u\|^2 - 2t\langle x-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2$$

soit $2\langle x-u, w-u\rangle \leq t\|w-u\|^2$ pour tout $t \in]0,1]$ donc on obtient (2).

Réciproquement, si u vérifie (1) alors on a

$$\|u-x\|^2 - \|v-x\|^2 = 2\langle x-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 \leq 0$$

donc $\|u-x\| \leq \|v-x\|$ pour tout $v \in K$.

3) Unicité : Soient u et u' vérifiant (2). On a $\langle x-u, v-u\rangle \leq 0$ pour tout $v \in K$ et $\langle x-u', v-u'\rangle$ pour tout $v \in K$. On obtient donc en remplaçant v par u' dans le première expression et v par u dans la deuxième, puis en additionnant $\langle u-x+x-u', u-u'\rangle \leq 0$ d'où $u = u'$. □

Proposition. *L'application $P_K : H \to K$ est 1-lipschtizienne.*

Démonstration. Soient $x, y \in H$. Alors, pour tout $v \in K$, $\langle x - P_Kx, v - P_Kx\rangle \leq 0$ et $\langle y - P_Ky, v - P_Ky\rangle \leq 0$. En remplaçant v par P_Ky dans le première inégalité et y par P_Kx dans la deuxième et en additionnant, on a $\langle P_Kx - x + y - P_Ky, P_Kx + P_Ky\rangle \leq 0$ donc $\|P_Kx - P_Ky\|^2 \leq \langle x-y, P_Kx - P_Ky\rangle$ et $\|P_Kx - P_Ky\| \leq \|x-y\|$. □

Proposition. *Soit $M \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé tel que $M \neq \{0\}$. P_M est un opérateur linéaire continu et $\|P_M\| = 1$. $\mathrm{Ker} P_M = M^\perp$ et $H = M^\perp \oplus M$.*

Démonstration. Soit $x \in H$. Montrons que $u = P_Mx \Leftrightarrow \begin{cases} u \in M \\ \langle x-u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in M \end{cases}$

"$\Rightarrow$" On a $\langle x-u, v-u\rangle \leq 0$ pour tout $v \in M$ et donc $\langle x-u, tv-u\rangle \leq 0$ pour tout $v \in M$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $\langle x-u, v\rangle = 0$ pour tout $v \in M$.

"$\Leftarrow$" Alors on a $\langle x-u, v-u\rangle = 0$ pour tout $v \in M$.

Ainsi, si $x, y \in M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P_M(x) + \lambda P_M(y) \in M$ et pour tout $v \in M$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x - P_Mx, v\rangle + \lambda\langle y - P_My, v\rangle \\ &= \langle x - \lambda y - P_Mx - \lambda P_My, v\rangle \end{aligned}$$

donc $P_M(x+\lambda y) = P_M(x) + \lambda P_M(y)$ donc P_M est linéaire. De plus, pour tout $x \in M$,

$$\|P_Mx\| = \|P_Mx - P_M0\| \leq \|x-0\| = \|x\|$$

donc P_K est bornée donc continue et $\|P_M\| \leq 1$. Pour tout $x \in M$, $P_M x = x$ donc $\|P_M\| \geq 1$.

Soit $x \in \mathrm{Ker} P_M$ et $v \in M$. $\langle x, v \rangle = \langle x - P_M x, v \rangle = 0$ donc $x \in M^\perp$.

Soit $x \in M^\perp$, alors $0 \in M$ et $\langle x - 0, v \rangle = 0$ pour tout $v \in M$ donc $P_M x = 0$.

Soit $x \in H$, alors $x = P_M x + x - P_M x$. $P_M x \in M$ et pour tout $v \in M$, $\langle x - P_M x, v \rangle = 0$ donc $x - P_M x \in M^\perp = \mathrm{Ker} P_M$. Ainsi $H = M + M^\perp$. Comme $M \cap M^\perp = \{0_M\}$

□

Leçons concernées

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications

219 Problèmes d'extremums

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Références

[1] Haïm Brezis. Analyse fonctionelle Théorie et applications. Masson.