Table de caractères de $\mathbb{D}_4$ et $\mathbb{H}_8$

31 mai 2013

Il existe deux groupes non isomorphes, $\mathbb{D}_4$ et $\mathbb{H}_8$, qui ont la même table de caractère. On va construire la table de caractère de $\mathbb{D}_4$ en explicitant les représentations mises en jeu et celle de $\mathbb{H}_8$, de manière plus abstraite, en utilisant les théorème sur les caractères. On rappelle que $\mathbb{D}_4$ est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent le cube invariant et $\mathbb{H}_8 = \langle x, y \mid x^4 = 1 \; y^2 = x^2 \; yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ le groupe des quaternions.

1 Table de caractères de $\mathbb{D}_4$

On appelle $r \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et s la réflexion orthogonale d'axe O_x. On admet que $\mathbb{D}_4 = \{\mathrm{Id}, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Cherchons les classes d'équivalence de $\mathbb{D}_4$. $\{\mathrm{Id}\}$ forme une classe d'équivalence. $|\langle r \rangle| = 4$ donc $\langle r \rangle$ est distingué car d'indice $\frac{8}{4} = 2$. Or, $srs = r^3$ et $sr^2s = r^2$ donc $\{r, r^3\}$ et $\{r^2\}$ forment deux classes d'équivalence disjointes. De plus, $r^{-j}sr^ir^j = sr^{i+2j}$ donc sr^i et sr^k sont conjuguées si et seulement si i et k ont la même parité donc $\{sr, sr^3\}$ et $\{s, sr^2\}$ forment deux classes d'équivalence disjointes. On a donc 5 classes d'équivalence et une table de caractère de la forme

représentant	Id	r	r^2	s	sr
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2					
χ_3					
χ_4					
χ_5					

On note $\rho_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_4 & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ u & \mapsto & \det(u)\mathrm{Id} \end{array}$. Le couple $(\mathbb{C}, \rho_2)$ est une représentation de degré 1 donc irréductible. On note χ_2 son caractère et on remplit la deuxième ligne du tableau.

A présent, on fait agir $\mathbb{D}_4$ sur $\mathbb{R}^2$ de manière naturelle, c'est-à-dire en posant $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $\rho_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_4 & \to & \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & u \end{array}$. Le couple $(\mathbb{R}^2, \rho_3)$ est une représentation de $\mathbb{D}_4$ de degré 2. On pose χ_3 son caractère. La matrice de Id dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de trace 2, celle de r est $\begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -sin\frac{\pi}{2} \\ sin\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ de trace 0, celle de r^2 est $\begin{pmatrix} cos\pi & sin\pi \\ sin\pi & cos\pi \end{pmatrix}$ de trace -2, celle de sr est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de trace 0 et celle de s est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de trace 0. Vérifions que ce caractère est irréductible :

$$\begin{aligned} (\chi_3, \chi_3) &= \frac{1}{|\mathbb{D}_4|} \sum_{u \in \mathbb{D}_4} \chi_3(u)\overline{\chi_3(u)} \\ &= \frac{1}{8}\left(1.2^2 + 2.0^2 + 1.(-2)^2 + 2.0^2 + 2.0^2\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc χ_3 est irréductible et on remplit la troisième ligne.

On pose $\rho_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_4 & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ \mathrm{Id} & \mapsto & \mathrm{Id} \\ r & \mapsto & -\mathrm{Id} \\ r^2 & \mapsto & \mathrm{Id} \\ s & \mapsto & \mathrm{Id} \\ sr & \mapsto & -\mathrm{Id} \end{array}$ et $\rho_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}_4 & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ \mathrm{Id} & \mapsto & \mathrm{Id} \\ r & \mapsto & \mathrm{Id} \\ r^2 & \mapsto & -\mathrm{Id} \\ s & \mapsto & -\mathrm{Id} \\ sr & \mapsto & \mathrm{Id} \end{array}$: ρ_4 conserve la parité de la puissance de r et ρ_5 l'inverse. D'après les remarques faites en début d'étude, ces deux morphismes définissent deux représentations de degré 1 (donc irréductibles) non ismorphes à $(\mathbb{C}, \rho_2)$ dont les caractères sont facile à calculer et que l'on reporte dans le tableau :

représentant	Id	r	r^2	s	sr
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	2	0	-2	0	0
χ_4	1	-1	1	1	-1
χ_5	1	1	-1	-1	1

2 Table de caractères de $\mathbb{H}_8$

Par définition, $x^2 = y^2 \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ et x et y engendrent $\mathbb{H}_8$ donc $x^2 \in Z(\mathbb{H}_8)$, x^2 est d'ordre 2 donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{\mathrm{Id}, x^2\} \lhd \mathbb{H}_8$. Donc $\mathbb{H}_8/\{\mathrm{Id}, x^2\}$ est d'ordre 4 donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Or, donc $\mathbb{H}_8/\{\mathrm{Id}, x^2\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Traçons la table de caractère de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$: $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ étant abélien, il a 4 classes d'équivalence $\{(0,0)\}, \{(1,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,1)\}$ et les représentations irréductibles sont toutes de degré 1. La table est donc de la forme :

représentant	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1			
χ_3	1			
χ_4	1			

On note ϵ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$ la signature et ρ_2 : $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ x & \mapsto & (-1)^{\epsilon(a)}\mathrm{Id} \end{array}$. Le couple $(\mathbb{C}, \rho_2)$ est un représentation. On note χ_2 son caractère.

On note ρ_3 : $\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ (a,b) & \mapsto & (-1)^{\epsilon(b)}\mathrm{Id} \end{array}$. Le couple $(\mathbb{C}, \rho_3)$ est un représentation. On note χ_3 son caractère. On remplit la deuxième et la troisième ligne facilement :

représentant	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1			

La dernière ligne s'obtient par la relation d'orthogonalité des colonnes. La deuxième colonne se complète par -1 car $1.1 - 1.1 + 1.1 - 1.1 = 0$, etc :

représentant	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

Pour remplir la table de caractères de $\mathbb{H}_8$, on utilise les résultats suivants :

- $\{\mathrm{Id}, x^2\}$ est d'ordre 2, distingué et $\{\mathrm{Id}\}$ forme une classe d'équivalence donc $\{x^2\}$ forme également une classe d'équivalence.

- Les caractères sont des fonctions centrales donc on forme la table de $\mathbb{H}_8$ en étendant celle de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

représentant	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,1)}$	x^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	
χ_3	1	1	-1	-1	
χ_4	1	-1	-1	1	
χ_5					

La somme des carrés des dimensions des caractères doit être égale à $|\mathbb{H}_8| = 8$ donc $(\chi_5(\text{Id}))^2 = 8-1-1-1-1 = 4$ et $\chi_5(\text{Id}) = 2$. On remplit la dernière ligne (sauf la dernière colonne) par les relations d'orthogonalité des colonnes. On remplit la dernière ligne dernière colonne par la relation d'orthogonalité des lignes avec première ligne $\frac{1.2}{8} + \frac{1.\chi_5(x^2)}{8} = 0 \Leftrightarrow \chi_5(x^2) = -2$.

représentant	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,1)}$	x^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	
χ_3	1	1	-1	-1	
χ_4	1	-1	-1	1	
χ_5	2	0	0	0	-2

On remplit similairement la dernière colonne par la relation d'orthogonalité avec la première ligne :

représentant	$\overline{(0,0)}$	$\overline{(1,0)}$	$\overline{(0,1)}$	$\overline{(1,1)}$	x^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	1	1	-1	-1	1
χ_4	1	-1	-1	1	1
χ_5	2	0	0	0	-2

Leçons concernées :
107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
109 Représentations de groupes finis de petit cardinal.