Feuille d'exercices 1 - Modèles aléatoires discrets

Alexis Bienvenüe (alexis.bienvenue@univ-lyon1.fr)
Nabil Kazi-Tani (nabil.kazi-tani@univ-lyon1.fr)

– Tribus –

Exercice 1. *Ensembles appartenant à une tribu.*

1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une tribu, et si A et B appartiennent à $\mathcal{F}$ avec $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{F}$ où $B \setminus A$ est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A.
2. Montrer que si C et D appartiennent à $\mathcal{F}$, alors $C \Delta D \overset{def}{=} \{C \cap D^c\} \cup \{C^c \cap D\}$ aussi.

Exercice 2. *Exemples de tribus.*

1. Décrire la tribu engendrée par un ensemble A.
2. Décrire la tribu engendrée par deux ensembles A et B disjoints.

Exercice 3. *Tribu engendrée par une v.a.*
Soit X une v.a. sur un espace $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que l'ensemble des $X^{-1}(B)$ quand B parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu. On l'appelle la tribu engendrée par X.

– Fonctions caractéristiques –

Exercice 4. *Variables symétriques.*

1. Let V be a random variable whose probability density is an even funtion f. Prove that the characteristic function of the law of V is given by :
$$\varphi_V(t) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(tx)dx, \quad \text{for any} \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. Let W be a random variable with a Laplace distribution, whose probability density is given by
$$f_W(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$
Prove that the characteristic function φ_W of the law of W satisfies $\varphi_W(t) = 1 - t^2\varphi_W(t)$ and deduce the expression of φ_W.

Exercice 5.

Let X and Y be two independent real random variables. We recall that we denote by P_Y the law of the random variable Y.

1. Prove that the characteristic function of the product XY is given by :
$$\varphi_{XY}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(ty)dP_Y(y), \quad \text{for any} \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. Prove that if X and Y have the same gaussian law $\mathcal{N}(0,1)$, then
$$\varphi_{XY}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
3. Let $Z := X_1X_2 + X_3X_4$, where X_1, X_2, X_3, X_4 are four independent random variables with gaussian law $\mathcal{N}(0,1)$. Prove that Z has a Laplace distribution, as defined in the previous exercise.

Exercice 6. *Lois de Poisson.*

1. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. a) Déduire de la question précédente que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
   b) Retrouver ce résultat par convolution.

– Convergence de variables aléatoires –

Exercice 7. *Modes de convergence.*

Dans les cas suivants, quels sont les différents modes de convergence que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ est susceptible de réaliser ?

1. $P(X_n = 1 - \frac{1}{n}) = P(X_n = 1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.
2. $P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$, $P(X_n = n) = 1 - \frac{1}{2^n}$.
3. $P(X_n = 0) = 1 - p_n$, $P(X_n = 1) = p_n$, où les X_n sont supposées indépendantes. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite (p_n) pour que :
   a) (X_n) converge presque sûrement.
   b) (X_n) converge dans L^1.
   c) (X_n) converge en loi.

Exercice 8. *Une somme cumulée.*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même loi donnée par : $P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = -1) = p$, $(p \in]0,1[)$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(S_n = 0)$.
2. Etudier $\sum P(S_n = 0)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9. *Une somme cumulée.*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de même loi donnée par : $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, p.s. l'évènement $\{S_n = k\}$ a lieu infiniment souvent.

1. Peut-on appliquer le lemme de Borel-Cantelli ?
2. On pose $q_j = P(\sup_{n\geq 0} S_n \geq j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En envisageant les deux valeurs possibles de X_1, montrer que $q_j = (q_{j-1} + q_{j+1})/2$.
3. En déduire que $q_j = 1$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et que $P(\limsup S_n = +\infty) = 1$.
4. Montrer que $P(\liminf S_n = -\infty) = 1$.
5. Conclure.

– Espérance conditionnelle –

On travaille sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. On suppose que les v.a. dont on étudie l'espérance conditionnelle sont intégrables.

Exercice 10. Si X et Y sont dans L^2, montrer que $E(YE(X|\mathcal{G})) = E(XE(Y|\mathcal{G}))$.

Exercice 11. Montrer que si $X \in L^2$, si $E(X|\mathcal{G}) = Y$ et si $E(X^2) = E(Y^2)$ alors $X = Y$.

Exercice 12. Soient X et Y indépendantes (avec Y strictement positive) et $Z = XY$. Calculer $E(\mathbf{1}_{Z\leq t}|Y)$ en utilisant la fonction de répartition de X.

Exercice 13. *Conditionnement et indépendance.*
Soient X, Y deux v.a. telles que la v.a. $X - Y$ est indépendante de $\mathcal{G}$, d'espérance m et de variance σ^2.

On suppose que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Calculer $E(X - Y|\,\mathcal{G})$. En déduire une expression de $E(X\,|\,\mathcal{G})$ en fonction de Y. Calculer $E(\,(X-Y)^2\,|\,\mathcal{G})$. En déduire $E(X^2\,|\,\mathcal{G})$.

Exercice 14. *Régression gaussienne.*
Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $E(X|Y) = \alpha Y$ pour un certain α que l'on déterminera.

Exercice 15. Soient X et Y des v.a.r. de carré intégrable telles que $E(X|Y) = Y$ et $E(Y|X) = X$. Montrer que $X = Y$.

Exercice 16.

1. Soient X, Y, Z des v.a iid de loi normale centrée et réduite. Calculer $E(X + Y|X + Z)$.
2. On suppose maintenant que X et Y ont la loi $\mathcal{N}(1, 4)$. Calculer $E(U|V)$ où $U := (X + Y)^2$ et $V := \frac{X}{2}$.

Exercice 17. Soit X de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On note h la fonction à valeurs réelles, mesurable, définie sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $E(X|X^+) = h(X^+)$.

1. Est-ce que $\{X \leq 0\} \in \sigma(X^+)$?
2. Montrer que $E(X\mathbf{1}_{\{X\leq 0\}}|X^+) = h(0)\mathbf{1}_{\{X\leq 0\}}$. En déduire la valeur de $h(0)$.
3. Calculer $E(X|X^+)$ et $E(X^2|X^+)$.

– Premiers modèles discrets –

Exercice 18. Soit T une v.a. entière définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$ et pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n + p|T \geq n) = P(T \geq p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Exercice 19. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et ν une v.a. à valeurs entières indépendante de la suite (X_n). On définit S_ν sur Ω par $S_\nu(\omega) = 0$ si $\nu(\omega) = 0$ et $S_\nu(\omega) = \sum_{n=1}^{\nu(\omega)} X_n(\omega)$ si $\nu(\omega) \geq 1$.

1. Montrer que S_ν est une variable aléatoire.
2. On suppose que les X_n sont à valeurs entières et ont même loi. Déterminer la fonction génératrice de S_ν en fonction de celle de ν et de X_1.
3. Trouver la loi de S_ν lorsque les X_n suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et ν suit une loi géométrique de paramètre $\alpha \in]0, 1[$.