Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2014–2015

M1 SAFIR

Modèles aléatoires discrets, Fiche d'exercices n°2

Exercice 1 Chaîne à deux états On considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1, 2\}$ dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

où $p, q \in [0, 1]$ sont fixés.

1. Dessiner son graphe. Déterminer la (ou les) mesures stationnaires.
2. On note $a_n = P(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$. Ecrire une relation de récurrence pour les couples $(a_n; b_n)$, et la résoudre.
3. Etudier alors le comportement asymptotique de $\mathbb{P}(X_n = 1)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2
Soit X_n une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Est-ce une chaîne de Markov irréductible ?
2. Déterminer les éléments de E transients ou récurrents pour cette chaîne et la période de chacun de ces points.
3. Déterminer la ou les mesures stationnaires de cette chaîne.

Exercice 3 Dépenses énergétiques
On dispose, dans une maison individuelle, de deux systèmes de chauffage, l'un de base, et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent.
Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$; en revanche, si on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude, et l'on passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{3}{4}$.
Soit X_n l'état du système au jour numéro n.

1. Expliquez pourquoi $(X_n)_{n\geq 0}$ peut être modélisé par une chaîne de Markov homogène. Quel est son espace d'états ? Déterminer sa matrice de transition et son graphe.

2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis exprimer p_n en fonction de p_0. Que vaut $lim_{n\longrightarrow\infty} p_n$?
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant ?
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec une proba $\frac{3}{5}$, alors il en est de même tous les jours qui suivent.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 1,5€, et dans l'état 2 coûte 2€. Chaque transition de l'état 1 à l'état 2 ou inversement coûte 0,5€. Calculer le coût moyen d'une journée dans la situation précédente.

Exercice 4 Bruit qui court

Un message pouvant prendre 2 formes (oui ou non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou le déforme en son contraire avec une probabilité $1 - p$. Les intermédiaires sont indépendants.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à 2 états.
2. Calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale. (indication : remarquer que (1, 1) et (1,-1) sont vecteurs propres de P et diagonaliser P)
3. Que se passe-t-il lorsque $n \longrightarrow +\infty$?

Exercice 5 Maladie contagieuse

Une maladie s'attrape avec une probabilité 0.05. Quand on l'a attrapée on peut soit en guérir soit acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, par ailleurs, 1/5 des gens est naturellement immunisé.

1. Modéliser l'état d'un individu dans la période de temps (n, n + 1) par une chaîne de Markov. Donner son graphe, sa loi initiale et sa matrice de transition.
2. Classifier les états.
3. Quelle est la probabilité d'attraper le maladie 2 fois de suite et de s'en sortir sans séquelle mais non immunisé ?
4. Existe-t-il une probabilité invariante ? Est-elle unique ? Pourquoi ?