Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2013-2014

M1 SAFIR

Modèles aléatoires discrets, Fiche d'exercices $N°3$

Exercice 1 Probabilités d'absorption et probabilités stationnaires d'une chaîne non irréductible

On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et d'éspace d'états S. On designe par S_T le sous-ensemble des états transients, supposé fini et non vide. Soit C un sous-ensemble clos irreductible d'états récurrents.

1. Montrer que $\forall x \in S$, $\forall y \in S_T$, $P^n(x,y) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. En déduire que si S est fini, la chaîne a au moins un état récurrent.
2. Soit T_c le temps d'atteinte d'un élément dans C. On appelle *probabilité d'absorption* de x par C :

$$\rho_C(x) = P_x(T_C < +\infty)$$

   Montrer que $\rho_C(x)$ vérifie l'équation

$$\rho_C(x) = \sum_{y\in C} P(x,y) + \sum_{y\in S_T} P(x,y)\rho_C(y),\ \forall x \in S_T$$

3. Soit $S = \{1,...,6\}$. Completez la matrice P pour qu'elle soit une matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} . & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminez les états transients et récurrents.
   (b) Déterminez les probabilités d'absorption dans les sous-ensembles clos irréductibles.
4. Montrer que la chaîne admet une infinité de probabilités stationnaires. Les donner.
5. Quelle est l'ésperance du temps de retour en chaque état récurrent ?

Exercice 2

Soient S et C deux ensembles finis ou dénombrables et $f : S \times C \to S$ une application. On considère une v.a. X_0 à valeurs dans S, ainsi qu'une suite de v.a. $(U_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans C. On définit $(X_n)_{n\geq 0}$ par la formule de récurrence :

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$$

On suppose que les v.a. $(X_0, U_1, ..., U_n, ...)$ sont indépendantes, et les $(U_n)_{n\geq 0}$ sont identiquement distribuées.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène, de matrice de transition
$$P(x,y) = P\left(f\left(x, U_1\right) = y\right)$$
2. **Application : marche aléatoire** Soient $X_0, \xi_1, \xi_2, ...$ des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes. X_0 est de loi μ et les ξ_i sont de même loi f. On définit la marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ par :
$$X_n = X_0 + \xi_1 + ... + \xi_n, \quad (n \geq 0)$$
Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène. Calculer sa matrice de transition.

Exercice 3 On se donne une suite de v.a. indéxés par $\mathbb{Z}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la longueur du dernier bloc de 1 touchant la position n. Par exemple, si les Y_n sont la suite donnée ci-dessous,

n ...	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y$_n$...	0	1	0	1	1	1	1	1	0

on a $X_2 = 0$ et $X_7 = 5$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ forme une chaîne de Markov. Quel est l'espace d'états ? Quelles sont les probabilités de transition ?
2. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.
3. Calculer sa mesure stationnaire.
4. Quel est le temps moyen entre deux zéros consécutifs de la chaîne ?