Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2013-2014

M1 SAFIR

Modèles aléatoires discrets, Fiche d'exercices $N°4$

Exercice 1 Soient N et M deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Montrer que leur superposition, c'est-à-dire le processus $K_t = M_t + N_t$ est un processus de Poisson. Déterminer son intensité.

Exercice 2 Soient X_1 et X_2 des variables de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.

1. Quelle est la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$?
2. Calculer $\mathbb{P}(Y = X_1)$.
3. **Application** Dans une station de taxi, il y a des voitures de marque A et B, qui arrivent suivant des processus de Poisson indépendants de taux 10 et 15 par heure respectivement. Soit T la minute d'arrivée du premier taxi. Quelle est la loi de T ? Quelle est la probabilité que le premier taxi arrivé soit de la marque A ?

Exercice 3 Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1. On note $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ et $N_x = \inf\{n \geqslant 0 : S_n > x\}$ où $x > 0$ est fixé.

1. Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(\exists n \geqslant 0, S_n = x) = 0$, $S_n \longrightarrow \infty$ p.s. et $\mathbb{P}(N_x < \infty) = 1$.
2. Etablir que $\mathbb{P}(N_x = n) = \mathbb{P}(S_n > x) - \mathbb{P}(S_{n-1} > x)$, $n \geqslant 2$.
3. Calculer $\mathbb{E}e^{-\alpha S_n}$, pour $\alpha > 0$ et en déduire que $dS_n(\mathbb{P}) = \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+dt}$. Expliciter la loi de N_x.
4. Etablir la formule
$$\mathbb{E}\left(e^{-\alpha(S_{N_x}-x)}\right) = \left(1 - \mathbb{E}e^{-\alpha X_1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}e^{-\alpha(S_n-x)}\mathbf{1}_{S_n>x}$$
5. En déduire que S_{N_x} suit une loi exponentielle de paramètre 1.
6. Calculer $P\left(|\frac{S_{N_n}}{n} - 1| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et en déduire que $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{N_n}}{n} = 1$ puis que $\lim_{x\to\infty}\frac{S_{N_x}}{x} = 1$.
7. Montrer que $\mathbb{E}e^{i\alpha N_x} = e^{i\alpha - x(1-e^{i\alpha})}$ et en déduire que $\dfrac{N_x - x}{\sqrt{x}}$ converge en loi lorsque $x \longrightarrow +\infty$ et déterminer la loi limite.

Exercice 4 **Paradoxe de l'inspection** Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, représentant des temps entre accidents rapportés à une compagnie d'assurance. $S_n = X_1 + ... + X_n$ et N_t le processus de renouvellement associé. Quelle est la loi de $S_{N_t+1} - t$? de $t - S_{N_t}$? Que pensez-vous de l'espérance de $S_{N_t+1} - S_{N_t}$? En déduire une contradiction avec ce que vous savez sur X_{N_t+1}. En quoi ce raisonnement est-il faux ?