Developpement 1 : Le théorème de Bohr-Mollerup

Théorème : (Bohr-Mollerup) :
Si $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ vérifie $f(x+1) = xf(x)$ et $\ln\circ f$ est convexe et $f(1) = 1$ alors $f = \Gamma$.

Lemme 1 : i) $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
ii) $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

Démonstration : i) $\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$.

On $\underbrace{\int_a^b t^x e^{-t}\,dt}_{\xrightarrow[b\to+\infty]{a\to 0}\Gamma(1+x)} \underset{IPP}{=} \left[-t^x e^{-t}\right]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$= \underbrace{(-b^x e^{-b} + a^x e^{-a})}_{\xrightarrow[b\to+\infty]{a\to 0} 0} + \underbrace{x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{\xrightarrow[b\to+\infty]{a\to 0} x\Gamma(x)}$

Donc $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$

ii) Soient $p, q \in]1,+\infty[$ tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soient $x, y \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{p}x + \tfrac{1}{q}y\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y - 1} e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} (t^{x-1}e^{-t})^{\frac{1}{p}} (t^{y-1}e^{-t})^{\frac{1}{q}}\,dt.$$

$$\underset{(\text{Hölder})}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\,\Gamma(y)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $\ln\Gamma\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}\ln\Gamma(x) + \frac{1}{q}\ln\Gamma(y)$
Donc $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

Lemme 2 : Pour tout $x > 0$ on a : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

Démonstration : Soit $x > 0$ et $f_n(t) = t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$

$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln(1 - \frac{t}{n})}$; $n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}$

- $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^{x-1}e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$
- $n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{\text{inégalité de convexité}}{\leq} -t \Rightarrow f_n(t) \leq \underbrace{e^{-t}t^{x-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)}_{\text{intégrable sur }]0,+\infty[}\ \forall t > 0.$

Donc par le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$$

Or $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt.$

(IPP successives)

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{x}t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n}_{=0} + \frac{n}{nx}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt$$

$$= \dots\dots$$

$$= \frac{n!}{n^n x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}\,dt$$

$$= \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{D'où } \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

<u>Démonstration du théorème</u> : Soit f comme dans l'énoncé.

insister là-dessus pour les leçons 229 et 253

- On a $n+x = (1-x)n + x(n+1)$ (avec $x\in]0,1]$)

Donc $f(n+x) = f((1-x)n + x(n+1))$

$$\leq f(n)^{1-x} f(n+1)^x \quad (\text{car } \ln\circ f \text{ convexe})$$

$$= ((n-1)!)^{1-x}(n!)^x \quad (\text{car } f(u+1) = u f(u)\ \forall u)$$

$$= (n-1)!\,n^x.$$

$$\hookrightarrow f(n+x) \leq (n-1)!\,n^x.$$

- De même : $n+1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$

Donc $\underset{n!}{f(n+1)} \leq f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x}$

$$= f(n+x)^x (n+x)^{1-x} f(n+x)^{1-x}$$

$$= f(n+x)(n+x)^{1-x}$$

$$\hookrightarrow f(n+x) \geq \frac{n!}{(n+x)^{1-x}}$$

- On a donc finalement :

$$\frac{n!}{(n+x)^{1-x}} \leq f(n+x) \leq (n-1)!\,n^x.$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(n+x)^{1-x}} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\Gamma(x)}\cdot\underbrace{\left(\frac{n+x}{n}\right)^x}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\Gamma(x)}\underbrace{\left(\frac{x+n}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}$$

Donc $f(x) = \Gamma(x)\ \forall x\in]0,1]$, donc $f = \Gamma$

(car $f(x+1) = xf(x)$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$)