Théorème de Poisson

21 mai 2013

Dans la suite, on se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On considère toutes les suites indexées sur $\mathbb{N}^*$. Pour une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on note $\varphi_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & E[e^{itX}] \end{array}$ sa fonction caractéristique.

Théorème. *Poisson : Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de loi binomiale $Bin(n, p_n)$ où $(p_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ est une suite telle que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq k$. Alors

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot (np_n)^k \, (1-p_n)^n (1-p_n)^k \end{aligned}$$

Or, comme $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(1-p_n)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et on peut appliquer Taylor-Young pour donner le développement limité suivant :

$$(1-p_n)^n = e^{n\ln(1-p_n)} = e^{-np_n + \underset{n\to\infty}{o}(np_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$$

Comme $(np_n)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^k$ et $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k} = 1$. Donc $P(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ donc, par le théorème d'équivalence de Lévy, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ quand n tend vers l'infini. □

Proposition. *Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors, $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$*

Démonstration. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E[e^{itX}] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{-it}) \\ &= \exp(\lambda(e^{it} - 1)) \end{aligned}$$

□

Théorème. *des événements rares : Soit $\lambda > 0$ et $(M_n)_n$ une suite croissante telle que $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\{A_{n,j} \mid 1 \leq j \leq M_n\} \subset \mathcal{F}$ une suite d'événements indépendants. On pose $P(A_{n,j}) = p_{n,j}$ et on note $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} 1_{A_{n,j}}$. On suppose que $\max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Alors la suite $(S_n)_n$ converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Démonstration. Par indépendance des $A_{n,j}$ pour $1 \leq j \leq M_n$, on a pour $t \in \mathbb{R}$, comme $1_{A_{n,j}}$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p_{n,j}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(t) &= \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{1_{A_{n,j}}}(t) \\
&= \prod_{j=1}^{M_n} \left(p_{n,j}e^{it} + (1-p_{n,j})\right) \\
&= \prod_{j=1}^{M_n} \left(1 + p_{n,j}(e^{it}-1)\right)
\end{aligned}$$

On note log la détermination principale du logarithme complexe. Il résulte de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en 0 que, pour tout z tel que $|z| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\log(1+z) &= \log(1) + z(\log)'(1) + z^2 \int_0^1 (1-t)(\log)"(1+zt)dt \\
&= 0 + z\frac{1}{1} - z^2 \int_0^1 (1-t)\frac{1}{(1+zt)^2}dt
\end{aligned}$$

Notons $z = e^{it} - 1$. Puisque $\max\limits_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\max\limits_{1\leq j\leq M_n} \mid p_{n,j}z \mid < \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$\begin{aligned}
\log\varphi_{S_n}(t) &= \sum_{j=1}^{M_n} \log\left(1 + p_{n,j}z\right) \\
&= \sum_{j=1}^{M_n} \left(zp_{n,j} - z^2 p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+up_{n,j}z)^2}du \right) \\
&= z\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} - z^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+up_{n,j}z)^2}du
\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $u \in [0,1]$, $\mid 1 + up_{n,j}z \mid \geq 1 - u \cdot p_{n,j}\,|z| \geq 1 - p_{n,j}\,|z| \geq \frac{1}{2}$. On a donc pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{(1+up_{n,j}z)^2}du \right| &\leq \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{|1+up_{n,j}z|^2}du \\
&\leq \sum_{j=1}^{M_n} 4\cdot p_{n,j}^2 \int_0^1 (1-u)du \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \\
&\leq 2\left(\max_{1\leq j\leq M_n} p_{n,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

On a alors, d'après les hypothèses, $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(\varphi_{S_n}(t)\right) = \lambda(e^{it}-1)$ ce qui, par continuité de l'application exponentielle donne $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$. En vertu du théorème de Lévy, on obtient le résultat annoncé. □

Leçons concernées
218 Applications des formules de Taylor.
249 Suites de variables de Bernoulli indépendantes.
251 Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
252 Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications.

Références

[1] Jean-Yves Ouvrard. Probabilité 1. Cassini.

[2] Jean-Yves Ouvrard. Probabiliré 2. Cassini.