Probabilités, fiche d'exercices n°2

Exercice 6
Soit $(E, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\{A_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'événements.
1) Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \ .$$
2) Démontrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0 \ .$$
Remarque : Ce résultat porte le nom de lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 7
L'engin spatial StarJojo s'éloigne de la terre à vitesse constante. Il envoie un message toutes les secondes, mais son système gyroscopique est défectueux et le message est envoyé dans une direction aléatoire, de telle sorte que la probabilité qu'un message envoyé d'une distance r de la terre arrive à la station de réception sur terre est proportionnelle à $1/r^2$.

Montrer qu'il existe presque-sûrement un moment à partir duquel la station de réception ne recevra plus jamais aucun message en provenance de StarJojo.

2 Probabilités conditionnelle et indépendance

Exercice 8
On distribue (après les avoir bien mélangés) N billets à gratter à des revendeurs, parmi lesquels une proportion p est gagnante.

Jojo achète deux billets. On note A l'événement « le premier billet est gagnant », et B l'événement « le deuxième billet est gagnant ». Déterminer la probabilité des événements A et B.

Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Observer l'évolution du défaut d'indépendance de A et B lorsque N tend vers l'infini, p restant constant.

Exercice 9
Les services marketing de la société d'assurance automobile *JojoTranquile* ont mis au point un questionnaire pour dépister les « conducteurs imprudents » (cette catégorie rassemble en fait tous les assurés déclarant au moins trois sinistres au cours d'une année, et on a estimé qu'ils représentent 2 % de la population), et éventuellement refuser de les assurer. Depuis plus d'un an, on a demandé à tous les assurés de le remplir. Les résultats sont les suivants :

— parmi les conducteurs imprudents assurés à *JojoTranquile*, 95 % auraient été dépistés par le questionnaire.
— parmi les autres, 4 % auraient tout de même été déclarés imprudents à cause du questionnaire.

En énonçant ces résultats, le responsable de ce projet, M. Question, se félicite du travail accompli par son équipe.

Lorsqu'un client potentiel, remplissant le questionnaire, est déclaré imprudent par la procédure mise au point par M. Question, quelle est la probabilité qu'il soit réellement imprudent ? Pensez-vous qu'il soit souhaitable d'utiliser les conclusions du questionnaire pour exclure préventivement de nouveaux clients ?

Exercice 10
Jojo fait du ski à la station « Vallées blanches ». Il est en haut du téléski des Cailloux, et a le choix entre les pistes de Tout-Plat (une bleue), Les-Bosses (une rouge) et Rase-Mottes (une noire). Il va choisir une de ces trois pistes au hasard, de telle façon qu'il choisisse la bleue ou la noire avec probabilité $1/4$, et la rouge, qu'il préfère, avec probabilité $1/2$. Il descend ensuite la piste choisie. Jojo n'est pas encore très à l'aise cette saison, et il tombe avec une probabilité de 0,1 sur la piste bleue, de 0,15 sur la piste rouge, et de 0,4 sur la piste noire.

1) Soit $A =$ « Jojo tombe en decendant la piste qu'il a choisie ». Calculer $\mathbb{P}(A)$.
2) Bernard, qui attend Jojo en bas des pistes, à la terrasse d'un café, voit arriver Jojo couvert de neige : il est donc tombé. Sachant cela, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté la piste noire ?

Exercice 11
On lance un dé à six faces truqué : ce dé donne deux fois plus souvent de cinq et de six que les autres chiffres.
Construire un espace probabilisé qui modélise un lancer de ce dé.
Construire un autre espace probabilisé qui modélise cinq lancers de ce dé.
Construire un autre espace probabilisé qui modélise une infinité de lancers de ce dé.

Question 1 ♣ On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et A et B deux événements de probabilité non nulle. A et B sont indépendants si et seulement si

- ☐ $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A)$
- ☐ $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A \mid B)$
- ☐ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- ☐ $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$
- ☐ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Question 2 ♣ Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret et A, B et C trois événements de probabilité non nulle. On note $\mathbb{P}_C$ la probabilité sur Ω définie par $\mathbb{P}_C(E) = \mathbb{P}(E \mid C)$ pour tout $E \subset \Omega$.
Pour chaque propriété ci-dessous, cocher la case correspondante si elle suffit à montrer que A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}_C$.

- ☐ A et B sont tous deux indépendants de C pour $\mathbb{P}$
- ☐ A, B et C sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}$
- ☐ A, B et C sont deux à deux indépendants pour $\mathbb{P}$
- ☐ A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$

Question 3 ♣ Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret, et A et B deux événements. Alors :

- ☐ Si $\mathbb{P}(A) \leq 1/2$ et $\mathbb{P}(B) \leq 1/2$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/4$
- ☐ Si $\mathbb{P}(A) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(B) \geq 1/2$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 1/4$
- ☐ Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$

Question 4 ♣ Considérons deux événements A et B. Que peut-on affirmer en toute généralité ?

- ☐ Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants
- ☐ Si A et B sont incompatibles, alors ils ne sont pas indépendants
- ☐ Si A et B sont indépendants, alors ils sont incompatibles
- ☐ Si A et B sont indépendants, alors ils ne sont pas incompatibles

Question 5 ♣ Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret, et A et B deux événements. Alors :

- ☐ Si $A \cup B = \Omega$, alors $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 1$
- ☐ Si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0$
- ☐ Si $A \cup B = \Omega$, alors $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$
- ☐ Si $A \cup B = \Omega$, alors $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \geq 1$