Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

19 mars 2013

Proposition. *Soit* $(E) : xy'' + 2y' - xy = 0$ *où* $y : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *est deux fois dérivable. Alors, l'ensemble des solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$ *est de la forme* $\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ *avec, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$*,*

$$f_1(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$$

Schéma de la preuve :

1. Recherche d'une solution développable en série entière
2. Calcul du rayon de convergence et calcul de la somme
3. Recherche de l'autre solution par la méthode de variation de la constante

Démonstration. 1) Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ solution de (E). Alors on a

$$x\sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} - x\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ (n(n+1) + 2(n+1))a_{n+1} - a_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = a_{n-1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons par récurrence que $a_{2n} = \frac{a_0}{(2n+1)!} \forall n \in \mathbb{N}$

$n = 0$: trivial

$n \to n+1$: On suppose que $a_{2n} = \frac{a_0}{(2n+1)!}$. Alors $a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a_0}{(2n+3)!}$, ce qui achève la récurrence.

2) On applique le crière de d'Alembert à la suite $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = \frac{|a_0|}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{|a_0|} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 0$$

donc $R = +\infty$ (Attention ! Si on avait eu une limite égale à2, on n'aurait pas eu $R = +\infty$).

3) On recherche une solution de la forme $y(x) = z(x)f_2(x)$. On replace dans l'équation :

$$x(z''f_2 + 2z'f_2' + zf_2'') + 2(z'f_2 + zf_2') - xzf_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z''(xf_2) + z'(2xf_2' + 2f_2) + z(xf_2'' + 2f_2' - xf_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z''(xf_2) + z'(2xf_2' + 2f_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z''\mathrm{sh}(x) + z'(2x\cdot\frac{x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x^2} + 2\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z''\mathrm{sh}(x) + 2z'\mathrm{ch}(x) = 0$$

On pose $u = z'$, on a alors

$$\frac{u'}{u} = -2\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$$

Or, $\int -2\frac{ch(t)}{sh(t)}dt = -2\ln(|\mathrm{sh}(x)|) = \ln(\left|\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}\right|)$ donc $\ln|u| = K\cdot\ln(\left|\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}\right|)$ avec $K\in\mathbb{R}$. Donc $u = \frac{\lambda_1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ et $z = \int\frac{\lambda_1}{\mathrm{sh}^2(x)}dx = \lambda_1\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} + \lambda_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Finalement, on a

$$y(x) = z(x)f_2(x) = \lambda_1\frac{\mathrm{ch}(x)}{x} + \lambda_2\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$$

□

Leçons concernées

221 Equations différentielles linéaires. Systèmes d́equations differentielles lineaires. Exemples et applications.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Remarque. Il n'y a rien de bien difficile dans cette résolution de cette équation différentielle. Ce développement possède le mérite d'être original (personne ne fera exactement cette équation) et de permettre de se souvenir comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficents non constants. Par contre, je n'ai pas de référence, donc il faut bien le préparer en amont.