Suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$

2 juillet 2013

On souhaite étudier la suite définie par récurrence de la manière suivante : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = sin(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On commence par supposer que $u_0 \in [-1, 1]$, ce qui ne nous fait pas perdre de généralité. En effet, si $\mid u_0 \mid > 1$, on a de toute manière $u_1 \in [-1, 1]$ donc en posant $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, on se ramène au cas précédent. On suppose en plus que $u_0 \geq 0$. Si $u_0 < 0$, comme $[-1; 0[$ est stable par sin, on a $u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc en posant $v_n = -u_n$, comme on a $sin(-u_n) = -sin(u_n)$ pour tout n, on se ramène à l'étude dans le cas où $u_0 \in]0; 1]$. On suppose enfin que $u_0 > 0$ car si $u_0 = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout n.

Proposition. *$(u_n)_n$ converge vers 0 et* $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + \underset{\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$

Démonstration. $sin : [0; 1] \to [0; 1]$ est contractante. En effet, soient $x, y \in [0; 1]$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, il existe $c \in]0; 1[$ tel que $|\sin x - \sin y| = \cos c\,|x - y| < |x - y|$. D'après le théorème du point fixe sur un compact, la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de sin qui est 0. On applique la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \sin^{-2} u_n - u_n^{-2} &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^3\right)\right)^{-2} - u_n^{-2} \\
&= u_n^{-2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^2\right)\right)^{-2} - 1\right) \\
&= u_n^{-2}\left(1 + 2\frac{u_n^2}{6} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^2\right) - 1\right) \\
&= \frac{1}{3} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(1)
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ diverge et on a d'après le théorème de sommation des équivalents l'équivalence $\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}$. Ainsi, $u_{n+1}^{-2} - u_1^{-2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{3}$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

On pousse un peu plus le développement de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \sin^{-2} u_n - u_n^{-2} &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + \frac{u_n^5}{120} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^5\right)\right)^{-2} - u_n^{-2} \\
&= u_n^{-2}\left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + \frac{u_n^4}{120} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^4\right)\right)^{-2} - 1\right) \\
&= u_n^{-2}\left(1 + 2\frac{u_n^2}{6} - 2\frac{u_n^4}{120} + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}\left(-\frac{u_n^2}{6}\right)^2 + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^4\right) - 1\right) \\
&= u_n^{-2}\left(\frac{u_n^2}{3} - \frac{u_n^4}{60} + \frac{u_n^4}{12} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^4\right)\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{u_n^2}{15} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(u_n^2\right)
\end{aligned}$$

Comme, $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{n}$, on obtient

$$u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} - \frac{1}{3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{5n}$$

De plus, la série $\sum \frac{1}{n}$, tout comme la série $\sum u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} - \frac{1}{3}$. On a d'après le théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} - \frac{1}{3} \right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5k}$$

soit $u_{n+1}^{-2} - u_1^{-2} - \frac{n}{3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{5}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(\frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}(\ln n) \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 + \frac{3\ln n}{5n} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{\ln n}{n} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 - \frac{3\ln n}{10n} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{\ln n}{n} \right) \right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln n}{10n\sqrt{n}} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \right)
\end{aligned}$$

On obtient le développement asymptotique souhaité $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln n}{10n\sqrt{n}} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \right)$. □

Leçons concernées :
218 Applications des formules de Taylor.
223 Convergence des suites numériques. Exemples et applications.
224 Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
226 Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.

Références

[1] Xavier Gourdon. Les Maths en tête Analyse. Ellipses.

[2] Karine Madère. Développements d'agrégation Analyse. Ellipses.