Théorème de structure des polynômes symétriques:

Rappel $\forall 1 \leq p \leq n$ $\Sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_p}$ Pol sym élémentaires d'ordre n

Thm: Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ symétrique de degré p. Il existe un unique $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(X_1, \dots, X_n) = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$

→ Existence : on procède par double récurrence sur n et p:

$n=1$ Si $n=1$ $X_1 = \Sigma_1$ donc on pose $P = Q$

• La relation coefficients-racines donne:

$$\prod_{i=1}^{n} (X - x_i) = X^n - \Sigma_1(x_1, \dots, x_n) X^{n-1} + \dots + (-1)^k \Sigma_k(x_1, \dots, x_n) X^{n-k} + \dots$$
$$+ (-1)^n \Sigma_n(x_1, \dots, x_n)$$

En substituant $x_n = 0$ et en posant Σ_k^0 vérifiant $\Sigma_k^0(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Sigma_k(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$

on a $X \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i) = X\left(X^{n-1} - \Sigma_1^0(x_1, \dots, x_{n-1}) X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1}^0 (x_1, \dots, x_{n-1})\right)$

On a Σ_k^0 est le k-ième polynôme symétrique élémentaire d'ordre $n-1$

Hypothèse réc 1 : HR1 : le théorème est vérifié à l'ordre $n-1$

Récurrence sur p : * $p=0$ trivial

* Hypothèse réc 2 : HR2 : Soit $p > 0$. On suppose le résultat vrai $\forall P \in A[X_1, \dots, X_n]$ de degré $< p$.

Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ de degré p.

HR1 donne $\exists\, Q_1 \in A[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tq $P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = Q_1(\Sigma_1^0, \dots, \Sigma_{n-1}^0)$

ce qui implique que ~~$\deg(Q_1) \leq p$~~ $Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1})$ est de degré $\leq p$ en $X_1, \dots, X_n$. Soit $P_1 \in A[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant

$$P_1(X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n) - Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1})$$

P_1 est de degré $\leq p$ et symétrique et
$$P_1(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = P(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) - Q_1(\Sigma_1^0, \dots, \Sigma_{n-1}^0) = 0$$

donc $\exists\, \tilde{P} \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P_1 = X_n \tilde{P}$ mais comme P_1 est symétrique, on a nécessairement l'existence de $P_2 \in A[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P_1 = X_1 \dots X_n P_2 = \Sigma_n P_2$ avec $\deg(P_2) < p$ donc par hypothèse de récurrence $\exists\, Q_2 \in A[X_1, \dots, X_n]$ tq $P_2(X_1, \dots, X_n) = Q_2(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ donc $P(X_1, \dots, X_n) = Q_1(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1}) + \Sigma_n Q_2(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$

Unicité : supposons $\cancel{P(X_1,\dots,X_n)} = Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n) \cancel{- Q'(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)} = 0$

Montrons par récurrence sur n que $\cancel{Q = Q'}$ $Q=0$

$n=1$ trivial

HR on suppose le résultat vrai au rang $n-1$: soit $(Q_k)_{\mathbb{N}}$

$$Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} Q_k X_n^k \quad \text{avec} \quad Q_k \in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$$

supposons $Q \neq 0$. Il existe l tel que $Q_l \neq 0$ (prenons l minimal)

$$Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n) = (\Sigma_n)^l \sum_{k\geq l} Q_k(\Sigma_1,\dots,\Sigma_{n-1})\Sigma_n^{k-l}$$

Comme $Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)=0$ on a $\sum_{k\geq l} Q_k(\Sigma_1,\dots,\Sigma_{n-1})\Sigma_n^{k-l} = 0$

en substituant $X_n = 0$ on a $Q_l(\Sigma_1^0,\dots,\Sigma_{n-1}^0)=0$

$Q_l \in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$ et $(\Sigma_i^0)_i$ sont les polynômes symétriques élémentaires donc $Q_l = 0$, ce qui est absurde.

Ramis Deschamps Odoux
Spzinglas 23 algèbre